ಅಂದಾಜು ಎಷ್ಟು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ಡೇಟಾ (observed data) ದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಂತರಗಳ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ (upper) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ (lower) ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಿತಿಗಳು (limits) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ hypothesis testingನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪೋಲಿಷ್ (polish) ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಜೆರ್ಜಿ ನೇಮನ್ (Jerzy Neyman) ಅವರು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ.

4. ವಿಶ್ವಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕ

(Confidence interval population parameters)

ವಿಶ್ವಾಸರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರವು ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಡಕ್ಕಾಗಿ ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು ನೀಡುತ್ತದೆ ವಿಶ್ವಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ನಾವು ವಿಶ್ವಾಸದ ಮಟ್ಟವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪಡಿಸಬೇಕು. ನಾವು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಅಂಕಿಅಂಶದ ಮಾದರಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು.

ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರದ ಅರ್ಥ (Meaning of confidence interval): ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಂತರದ ಅಂದಾಜಕ್ಕೆ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅಜ್ಞಾತ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕವು ಮಾದರಿ ಡೇಟಾದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾದ ಮಾದರಿ ನಿಯತಾಂಕರ ಮೂಲಕ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಚರಿ μಯು ಮಾದರಿ ಸರಾಸರಿ $(\bar{x})$ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಗಡಿಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಶೇಕಡಾವಾರುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ (ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾದ ಶೇಕಡಾವಾರುಗಳೆಂದರೆ 90%, 95% ಮತ್ತು 99% ಶೇಕಡಾವಾರು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಟ್ಟ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರದ ಅರ್ಥ (Interpretation of confidence interval): ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಬಹುಶಃ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ

ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಅತ್ಯಂತ ಸವಾಲಿನ ಅಂಶವಾಗಿದೆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕದ ನಿಜವಾದ ಮೌಲ್ಯವು (ಉದಾ ಸರಾಸರಿ – mean) X ಕಡಿಮೆ ಬೌಂಡ (lower bound) Y ಮೇಲಿನ ಬೌಂಡ (upper bound) ಮಧ್ಯಂತರದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂದು ಶೇ 95ರಷ್ಟು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇದೆ.

ಅಂದರೆ X ಮತ್ತು Y ನಡುವಿನ ಮಧ್ಯಂತರವು ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕದ ನಿಜವಾದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಶೇ 95ರಷ್ಟು ವಿಶ್ವಾಸವಿದೆ.

ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು (Calculation of confidence interval): ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

1. ಮಾದರಿ ಡೇಟಾವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು
2. ಮಾದರಿ ಸರಾಸರಿ $\bar{x}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
3. ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಚಲನ (standard deviation) ಗೊತ್ತಿದಿಯೋ ಅಥವಾ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು.
4. ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ (standard deviation) ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಟ್ಟಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು Z-score ಬಳಸಬೇಕು.
5. ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ತಿಳಿದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಟ್ಟಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು t-statistic ಬಳಸಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯ ಕಾರ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕಗಳ ಅಂದಾಜುವಿಕೆ ತಿಳಿಸಿರಿ.
2. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರ ಎಂದರೇನು? ಅದರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
3. ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಾಂತರ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕ ಎಂದರೇನು? ವಿವರಿಸಿ.

* * *

ಹೀಗೆ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ಒಂದು ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಮಾದರಿ ಡೇಟಾದ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಅಜ್ಞಾತ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ನಿಯತಾಂಕದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಅಂದಾಜು ಆಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

3. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುಗಾರರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of Estimators)

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರ ಪ್ರಮುಖ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

(i) **ಪಕ್ಷಪಾತ (Bias):** ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರ ಪಕ್ಷಪಾತವನ್ನು ಅಂದಾಜುದಾರರ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾದ ನಿಯತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯದ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದಾಜು ಮೌಲ್ಯವು ಶೂನ್ಯ (0) ಪಕ್ಷಪಾತವನ್ನು ತೋರಿಸಿದಾಗ ಅದನ್ನು ಪಕ್ಷಪಾತವಿಲ್ಲವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರೆ ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್‌ನ ಅಂದಾಜು ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾದ ನಿಯತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯವು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದಾಗ ಅಂದಾಜುದಾರನನ್ನು ಪಕ್ಷಪಾತವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ನಿಯತಾಂಕದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವು ಅಳೆಯುವ ನಿಯತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಪಕ್ಷಪಾತವು ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(ii) **ಸ್ಥಿರತೆ (Consistency):** ಗಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ನಿಯತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸ್ಥಿರತೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುಗಾರನಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾಗಿರಲು ದೊಡ್ಡ ಮಾದರಿ ಗಾತ್ರದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಅಂದಾಜು ಅದರ ಅನುಗುಣವಾದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡುವ ಮೂಲಕ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲು ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವು ನಿಯತಾಂಕದ ನಿಜವಾದ ಮೌಲ್ಯದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಬೇಕು.

(iii) **ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಅಥವಾ ಪಕ್ಷಪಾತವಿಲ್ಲದ (Most efficient or unbiased):** ಸಣ್ಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಮತ್ತು ಪಕ್ಷ ಪಾತವಿಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರವಾದ ಅಂದಾಜುದಾರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಂದಾಜಿನಿಂದ ಪ್ರಸರಣದ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದು ಮಾದರಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬದಲಾಗಬೇಕು.

(iv) **ಜನಸಂಖ್ಯೆ ವಿತರಣೆ (Population distribute):** ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅಂದಾಜುಗಾರನ ದಕ್ಷತೆಯು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಅವಲಂಭಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ (Mean) ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ (median) ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಅಸಮಪಾರ್ಶ್ವದ ವಿತರಣೆಗಳು ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

- The sample standard deviation (s) is a point estimate of the population standard deviation (σ)
- The sample mean ($\bar{x}$) is a point estimate of the population mean μ.
- The sample variance (S^2 is a point estimate of population variance (σ^2)

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು (Point Estimation Vs interval Estimation): ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರದ ಅಂದಾಜುದಾರರಿದ್ದಾರೆ.

(i) ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರು

(ii) ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜುದಾರರು

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜಿನ ವಿರುದ್ಧ (opposite)ವಾಗಿದೆ. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರು ಒಂದೇ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು (signal value)ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯ ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜುದಾರರು ಮೌಲ್ಯಗಳ ಶ್ರೇಣಿ (range of values)ಯನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುಗಾರರವು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಜ್ಞಾತ ನಿಯತಾಂಕ (unknown parameter) ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಳಸುವ ಅಂಕಿಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಒಂದೇ ಅಂಕಿಅಂಶವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಇದು ಮಾದರಿ ಡೇಟಾ (sample data)ವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ ಅದು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಜ್ಞಾತ ನಿಯತಾಂಕದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಅಂದಾಜು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ, ಜನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಜ್ಞಾತ ನಿಯತಾಂಕದ ಸಂಭವನೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಮಧ್ಯಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು ಮಾದರಿ ಡೇಟಾವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರ (confidence interval) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

6. ಪಾಯಿಂಟ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು (Point and interval Estimation)

1. ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನಗಳು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯ ಕಾರ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಜನಸಂಖ್ಯೆ ನಿಯತಾಂಕಗಳ ಅಂದಾಜು.
   (Estimation of population parameters using methods of moments and maximum likelihood procedures)
2. ಪಾಯಿಂಟ್ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು
   (Point and Interval Estimation)
3. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುಗಾರರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು
   (Properties of Estimators)
4. ವಿಶ್ವಸಾರ್ಹ ಮಧ್ಯಂತರ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕ
   (Confidence interval population parameters)

1. ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನಗಳು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯ ಕಾರ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಜನಸಂಖ್ಯೆ ನಿಯತಾಂಕಗಳ ಅಂದಾಜು. (Estimation of population parameters using methods of moments and maximum likelihood procedures)

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುಗುಣವಾದ ಅಜ್ಞಾತ ನಿಯತಾಂಕದ ಉತ್ತಮ ಅಂದಾಜು ಪಡೆಯಲು ಮಾದರಿ ಡೇಟಾದಿಂದ ಪಡೆದ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಬಳಸುವುದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನವು ವಿಭಿನ್ನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನ (Method of moment): ನಿಯತಾಂಕಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವ ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನವನ್ನು 1887ರಲ್ಲಿ ರಷಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಪಾಫ್ನುಟಿ ಚೆಬಿಶೇವ್ (pafnuty chebyshev) ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಂತರ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾದರಿಗೆ ಸತ್ಯಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಜ್ಞಾತ ನಿಯಿತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತವಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಣಗಳ ವಿಧಾನವು ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಇದು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಷಣಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ಪರಿಗಣನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲರದ ಅಧಿಕಾರದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ) ಆಸಕ್ತಿಯ ನಿಯತಾಂಕಗಳ ಕಾರ್ಯಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮುಂದಿನ ಹಂತವು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಳಸಬೇಕಾದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಒಂದನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಂತರ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಷಣಗಳ ಮಾದರಿ ಸರಾಸರಿ ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಅಪರಿಚಿತ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಕರಗಳ ಉತ್ತಮ ಅಂದಾಜು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ.

ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಅಂದಾಜುಗಾರ (Maximum Likelihood Estimator): ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜಿನ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಅಂದಾಜು ವಿಧಾನವು ಸಂಭವನೀಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ಅಪರಿಚಿತ ನಿಯತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ತಿಳಿದಿರುವ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಡೇಟಾ ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನೂ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಡೇಟಾಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತವಾದ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಅಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಜನಿಸಿದ ಶಿಶುಗಳ ಸರಾಸರಿ ತೂಕವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಂಶೋಧಕನು ಆಸಕ್ತಿ ಹೊಂದಿರುತ್ತಾನೆ. ಜನಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಜನಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿಶುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ್ದರಿಂದ ಸಂಶೋಧಕರು ಒಂದೇ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಪೂರ್ಣ ಅವಧಿಯ ಶಿಶುಗಳ ತೂಕವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ ಮಾದರಿ ದತ್ತಾಂಶದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪೂರ್ವ ಅವಧಿಯ ಶಿಶುಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿ ತೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಂಶೋಧಕರು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಅಂದಾಜುಗಾರರನ್ನೂ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

2. ಪಾಯಿಂಟ್ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಂತರ ಅಂದಾಜು (Point and Interval Estimation)

ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜುದಾರರು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಮಾದರಿಗಳಿಂದ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ನಿಯತಾಂಕ (Population para meter)ದ ಅಂದಾಜು ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಳಸುವ ಕಾರ್ಯ ಅಥವಾ ಸಾಧನವಾಗಿದೆ. ಪಾಯಿಂಟ್ ಅಂದಾಜು ಅಥವಾ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಜ್ಞಾತ (Unknown) ನಿಯತಾಂಕದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಅಂದಾಜನಂತೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುವ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಅವರು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾದರಿ ಡೇಟಾವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಹೀಗೆ ಇಡೀ ಜನಸಂಖ್ಯೆ (ವಿಶ್ವ)ಯಿಂದ ಡೇಟಾವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಸ್ಯಾಂಪ್ಲಿಂಗ್ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಸಮಯದ ಉಳಿತಾಯ, ನಿಖರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

3. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಸ್ಯಾಂಪಲ್‌ಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties Random Samples)

ಒಂದು ಸರಳವಾದ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಸ್ಯಾಂಪಲ್ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಮಾದರಿ (sample)ಯ ಗಾತ್ರ N ನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಗಾತ್ರ n ಮಾದರಿಯಾಗಿದೆ. ಗಾತ್ರ n ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಭವನೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಒಂದೇ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಮಾದರಿಯ ಎಂದು ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಇಂತಿವೆ.

i. ಜನಸಂಖ್ಯೆ(ವಿಶ್ವ)ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಾನೆ.

ii. ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯ್ಕೆಗೆ ನಿರಂತರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇರಬೇಕು.

iii. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಸ್ಯಾಂಪ್ಲಿಂಗ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಉಪವಿಭಾಗ (Subject) ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಉಪವಿಭಾಗದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಸದಸ್ಯರೂ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಮಾನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಾರೆ.

iv. ಇದು ಗುಂಪಿನ ಪಕ್ಷಪಾತವಿಲ್ಲದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮಾದರಿ ಸದಸ್ಯರನ್ನು ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಆಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

v. ಇದರ ಇನ್ನೊಂದು ಲಕ್ಷಣವೆಂದರೆ ಇದು ವರ್ಗೀಕರಣ ದೋಷದಿಂದ ಮುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಜನಸಂಖ್ಯೆ (ವಿಶ್ವ)ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಮುಂಗಡ ಜ್ಞಾನದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

vi. ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶ (date) ಸಂಗ್ರಹಣೆಯು ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಸ್ಯಾಂಪಲ್ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಮಾದರಿ ಎಂದರೇನು? ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿ.
2. ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆ ಎಂದರೇನು? ವಿವರಿಸಿ.
3. ಪದರು ಸಗಟು ನಮೂನೆ ಎಂದರೇನು? ವಿವರಿಸಿ.
4. ಗುಚ್ಛ ಪ್ರತಿಚಯನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
5. ಅಸಂಭವನೀಯತೆಯ ನಮೂನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
6. ಮಾದರಿ ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ.
7. ಮಾದರಿಯ ಅನುಕೂಲತೆ ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

* * *

4. ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪ್ತಿ

ಪೂರ್ಣ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ತಂತ್ರಕ್ಕಿಂತ ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರಗಳ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಹಣವನ್ನು ಇವು ಉಳಿಸುವುದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕಲೆಹಾಕಬಹುದು.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರ ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಕಾರಿ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

a. ಹಾಲಿನ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು

b. ಕಡುವು ಮುರಿಯುವ ಬಲವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು

c. ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬುಗಳ ತಾಳಿಕೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅನುಕೂಲಗಳು (Disadvantages)

ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರ ಎಷ್ಟೇ ಉಪಯೋಗಕಾರಿಯಾಗಿದ್ದರೂ ದೀಪದ ಕೆಳಗೆ ಕತ್ತಲು ಆವರಿಸಿರುವಂತೆ ಇದೂ ಸಹ ಹಲವು ಅನಾನುಕೂಲತೆಗಳಿಂದ ನರಳುತ್ತದೆ.

1. ನಮೂನೆಯ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಯೋಜಿಸಲು ಮತ್ತು ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಎಚ್ಚರಿಕೆವಹಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೋಷ ಪೂರಿತವಾಗಿರುವವು. ಮತ್ತು ತಪ್ಪು ದಾರಿಗಳೆಯುವಂತವುಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
2. ನಮೂನೆಯನ್ನು ಯೋಜಿಸಲು, ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಅರ್ಹ ತರಬೇತಿ ಹೊಂದಿದ ಸಂಶೋಧಕರ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಕಲೆಹಾಕಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.
3. ಜನಸಮುದಾಯದ ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳಿಂದ ಮಾಹಿತಿ ಬೇಕೆಂದಾಗ ನಮೂನೆ ತಂತ್ರ ಉಪಯೋಗಕಾರಿಯಲ್ಲ. ಆಗ ಸಂಪೂರ್ಣ ಜನಾಂಗವನ್ನೇ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ ಸಂಶೋಧನೆಗೆ ಇದೇ ಮಾದರಿಯ ಅಥವಾ ಇದೇ ನಮೂನಾ ತಂತ್ರವನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂದು ಕಡ್ಡಾಯವಿರಲಾರದು. **"ಅದು ಬೇಕು ಇದು ಬೇಕು, ದಾರಿನೂರಾರಿವೆ ಬೆಳಕಿನ ಭಾವದೆಡೆಗೆ ನೂರಾರು ಭಾವವ ಭಾವಿತೋಡಿಕೋ ನಿನಗೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಸಿಹಿನೀರ"** ಎಂಬ ಯುಕ್ತಿಯಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷಕರು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ ತನ್ನ ಗುರಿ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಯಾವ ನಮೂನಾ

ತಂತ್ರದಿಂದ ಉತ್ತಮವಾದ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವನ್ನು ಜನಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಒದಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೋ ಅಂತಹ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದೇ ಉತ್ತಮವಾದುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಭಿನ್ನವಾಗಿರದೇ ಅಂತರಾವಲಂಬಿಯಾಗಿರುವವು. ಸಂಶೋಧಕರ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಅನುಭವದ ಕೌಶಲ್ಯದಿಂದ ಯಾವುದೇ ನಮೂನೆಯು ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಉತ್ತಮವಾಗಬಲ್ಲದು.

2. ಮಾದರಿ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪಾತ್ರ (Role of Sampling Theory)

ಮಾದರಿ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಜನಸಂಖ್ಯೆ (ವಿಶ್ವ) ಮತ್ತು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಮಾದರಿಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳ ಅಧ್ಯಯನವಾಗಿದೆ. ಮಾದರಿ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ರ್‍ಯಾಂಡಮ ಮಾದರಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ವಿಶ್ವವನ್ನೂ (Universe) ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಸಿಲಾಗಿದೆ.

ಮಾದರಿ ನಮಗೆ ವಿವಿಧ ಪ್ರಯೋಜನಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಅದರ ಪಾತ್ರ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

1. **ಸಮಯದ ಉಳಿತಾಯ (Saves time) :** ಸ್ಯಾಂಪಲಿಂಗ್ ಡೇಟಾದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಸಮಯವನ್ನು ಬಹಳಮಟ್ಟಿಗೆ ಉಳಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.
2. **ಏಕತಾನತೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಿಸುತ್ತದೆ (Avoids monotormy):** ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಏಕತಾನತೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಿಸುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಡೇಟಾಗೆ ನೀವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.
3. **ನಿಖರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ (accurate reuslt):** ನಿಮಗೆ ಸೀಮಿತವಾದ ಸಮಯವಿದ್ದಾಗ, ಮಾದರಿಯನ್ನು ಬಳಸದೆ ಸಮೀಕ್ಷೆ ಅಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇದು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.
4. **ನಿಖರತೆ (Accuracy):** ನೀವು ಸರಿಯಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸುವಾಗ, ಹೆಚ್ಚಿನಮಟ್ಟದ ನಿಖರತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ.
5. **ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾಹಿತಿ (Detail Information) :** ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಮೂಲಕ ನೀವು ಡೇಟಾದ ವಿವರವಾದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.
6. **ವರ್ಗೀಕರಣ (Classification) :** ಇದು ವರ್ಗೀಕರಣ ದೋಷದಿಂದ ಮುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಡೇಟಾವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಕನಿಷ್ಠಜ್ಞಾನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ.

ಗುಣಗಳು (Merits)

1. ಪಾಲು ನಮೂನೆಯನ್ನು ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಬರುವದು.
2. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ತಾಂತ್ರಿಕ ಜ್ಞಾನದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವದಿಲ್ಲ.
3. ಪಾಲನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ವಿದ್ವಾಂಸರು ತಮ್ಮ ಪಾಲನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸ್ವತಂತ್ರರಿರುವರು ನಮೂನೆಯ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.
4. ಅಲ್ಪ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ಪಾಲುತೆಗೆಯಲು ಅನುಕೂಲಕರವಾದುದು ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂ ನಿರ್ಣಯದಿಂದ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸುಲಭವಾದುದು.

ದೋಷಗಳು (Demerits):

1. ಅಂದಾಜಿನ ಬಗ್ಗೆ ನಿಷ್ಪೃಷ್ಟವಾದ ಮಾಹಿತಿಯು ಈ ಪಾಲು ನಮೂನೆಯಿಂದ ದೊರೆಯಲಾರದು.
2. ಪಾಲು ನಮೂನೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ನಮೂನೆಯ ಮೂಲ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಅಲಕ್ಷಿಸಲಾಗುವದೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.
3. ಈ ತಂತ್ರದಿಂದ ಅಂದಾಜಿನ ಬಗ್ಗೆ ಸತ್ಯತೆ ಅಥವಾ ನಿಖರತೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದೊರೆಯಲಾರದು.

ಏನೇ ದೋಷಗಳಿದ್ದರೂ ಬಹುತೇಕ ಸಂಘ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಇದೇ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವವು. ಇದು ಸರಕಾರದ ಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ಣಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಜನತೆಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಬಹಳ ವೇಗವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಅಧಿಕ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ಮಾದರಿ (ನಮೂನೆ)ಗಳು (Recent Samplings)

1. ಸಂಪರ್ಕ ಸರಪಣಿ ನಮೂನೆ (Snowball Sampling) : ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಜನಾಂಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾಹಿತಿಯು ದೊರೆಯಲಾರದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಪರ್ಕ ಸರಪಣಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

2. ವಿಶೇಷ ನಮೂನೆ (Special Sampling) : ಕೆಲವು ಸಮುದಾಯಗಳು ಒಂದೆಡೆ ವಾಸವಾಗಿರದೆ, ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಗೊಳ್ಳುತ್ತಲಿರುವವು. ಇಂತಹ ಜನಾಂಗವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕಾದಾಗ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಸದಸ್ಯರನ್ನು ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಇದಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷ ನಮೂನಾ ಪದ್ಧತಿಯೆಂದು ಹೇಳುವರು.

3. ಪೂರ್ಣ ಜನಾಂಗ ನಮೂನೆ (Saturation Sampling) : ಕೆಲವೊಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆ ಒಂದು ಜನಾಂಗದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದಾಗಲೇ ಆ ಜನಾಂಗದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶೇಷ ಸಂಗತಿಗಳು ತಿಳಿಯುವವು. ಈ ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರಗಳೆಂದರೆ "ಇಡಿ ಆ ಜನಾಂಗವೇ ನಮೂನೆ" ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಜನಾಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ನಮೂನೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು (Advantages of Sampling)

1. ವೇಳೆಯ ಉಳಿತಾಯ

ಒಂದು ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಘಟಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸಮೀಕ್ಷಿಸುವುದರಿಂದ ವೇಳೆಯು ಬಹಳ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಪೂರ್ಣ ಜನ ಸಮುದಾಯದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲೆಹಾಕಲು ಸಮಯ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಊಹಿಸುವುದೂ ಕಷ್ಟ ನ್ಯಾಸವನ್ನು ನಮೂನೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅತಿ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಸಂಶೋಧಕರಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವು ಬೇಗ ದೊರಕುವದು.

2. ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ಖರ್ಚು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವದು.

ಸಂಪೂರ್ಣ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವದಕ್ಕಿಂತ ಇದಕ್ಕೆ (ಈ ನಮೂನೆಗೆ) ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚು ತಗಲುವದು. ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದುತ್ತಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗೆ ಈ ತಂತ್ರಗಳು ವರದಾನವಾಗಿವೆ.

3. ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರತೆ ಮತ್ತು ಸಿಂಧುತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ

ಸಂಪೂರ್ಣ ಜನಸಮುದಾಯದಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಿಂತ ನಮೂನೆ (ಮಾದರಿ) ತಂತ್ರಗಳಿಂದ ಕಲೆ ಹಾಕಿದ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಂಧುತ್ವವುಳ್ಳವು ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಮೂನೆಯಿಂದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಅರ್ಹ, ಅನುಭವಿಕ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಪಡೆದ ಸಂಶೋಧಕರಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಉದ್ದೇಶಪೂರಿತ ನಮೂನೆ (Purposive Sampling)
4. ಆಕಸ್ಮಿಕ ನಮೂನೆ (Accidental Sampling)
5. ಪಾಲು ನಮೂನೆ (Quota Sampling)

1. ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕ ನಮೂನೆ (Representatitive Sampling)

ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕ ನಮೂನೆಯೆಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಸ್ವಯಂ ಪ್ರಜ್ಞೆ ಮತ್ತು ವ್ಯವಹಾರಿಕ ಬುದ್ಧಿ ಮತ್ತೆಯಿಂದ ಒಂದು ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಹ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿದೆ.

2. ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತ ಪರಿಜ್ಞಾನ ನಮೂನೆ (Judgement Sampling)

ಈ ವಿಧದ ನಮೂನೆ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕ್ಷಕರು ಒಂದು ಜನಸಮುದಾಯದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಆಯ್ದ ಘಟಕಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಆ ಆಯ್ದ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಘಟಕಗಳು ನಮೂನೆಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವರು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. ಈ ರೀತಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ ನಮೂನೆಗೆ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತ ಪರಿಜ್ಞಾನ ನಮೂನೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುವರು.

ಈ ತಂತ್ರದ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಮೀಕ್ಷಕರು ಬಹಳ ಅನುಭವಿಗಳಿರಬೇಕಾಗುವದು. ಈ ತಂತ್ರದ ಸೂಕ್ಷ್ಮಾತಿಸೂಕ್ಷ್ಮಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಅರಿತವರಾಗಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು ಪಕ್ಷಪಾತಗುಣವಿರಬಾರದು. ಇದರ ಮುಖ್ಯ ಅವಗುಣವೆಂದರೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತಿಯಾಗಿರಲು ಕಷ್ಟವಾಗುವದು. ಆದರೆ ಅನುಭವ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

3. ಉದ್ದೇಶಪೂರಿತ ನಮೂನೆ (Purposive Sampling)

ಈ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಉದ್ದೇಶಪೂರಿತವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಉದ್ದೇಶ ಪೂರಿತ ನಮೂನೆಯೆಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ನಮೂನೆಯಿಂದ ಆದ ದೋಷಗಳನ್ನು ದೂರೀಕರಿಸಲು ಈ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಮೊದಲು ಇಡಿಯಾಗಿರುವ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಕೆಲವು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪುಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗ ವಿಂಗಡಿಸಲಾದ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಎಲ್ಲ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಹಾಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಕೆಲವು ಉಪ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವದು. ಇದು ಪ್ರಥಮ ಹಂತ. ಇನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ

ನೇರವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾದ ಗುಂಪುಗಳಿಂದ ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವದು. ಪುನಃ ಈ ಘಟಕಗಳಿಂದ ನಮೂನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗುವದು. ಇದನ್ನೇ ಉದ್ದೇಶಪೂರಿತ ನಮೂನೆಯೆಂದು ಕರೆಯುವರು. ಆದರೆ ಈ ಎರಡು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಪಾತ ನಡೆಯುವ ಸಂಭವವುಂಟು.

4. ಆಕಸ್ಮಿಕ ನಮೂನೆ (Accidental Sampling)

ಈ ಆಕಸ್ಮಿಕ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕ್ಷಕರು ನಮೂನೆಗಳಿಗೆ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವಾಗ ತಾವು ನೋಡಿದ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಘಟನೆಗಳ ಸಾಕ್ಷಾಧಾರಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವರು. ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆದು ಅವುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವರು. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುತ್ತಿರುವಾಗ ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ಅವರಿಗೆ ತಮ್ಮ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಗತಿಗಳು ಕಂಡರೆ ಅವನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಒಂದು ವಾರದವರೆಗೆ ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಓಡಾಡುವ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಳೆದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವದು. ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ನಮೂನಾ ತಂತ್ರವಾಗಿದೆ.

5. ಪಾಲು ನಮೂನೆ (Quota Sampling)

ಈ ಪಾಲು ನಮೂನೆಯು ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಪದರು ಅಥವಾ ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯಂತೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದೆಂದರೆ ಇಡೀ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಅನೇಕ ಪದರು (ಗುಂಪು)ಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದರಿನಿಂದ ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಇಷ್ಟು ಘಟಕಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಪಾಲನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಮೊದಲೇ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 10 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದರಿಗೆ ಅಥವಾ ಈ 10 ಗುಂಪಿಗೆ ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಲು ಒಬ್ಬ ಸಹಾಯಕನನ್ನು ನಿಯಮಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಲಾಗುವದು. ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಈ ಸಹಾಯಕನು ತನ್ನ ಪಾಲನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ನಮೂನೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಗೆಯ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸ ಬಹುದು. ಒಟ್ಟಿಗೆ ಅವನು ತನ್ನ ಪಾಲಿನ ಘಟಕಗಳನ್ನು ವೇಗವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿಯೂ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಉಳಿದವರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲರ ಪಾಲನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಒಂದು ನಮೂನೆಯು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪಾಲು ನಮೂನೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು.

ಅನಾನುಕೂಲತೆಗಳು (Demerits)

1. ಒಂದು ಗುಚ್ಛ ಅಥವಾ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಜನರು ಒಂದೇಯಾಗಿದ್ದು ಹೀಗಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವ ಸರಿಯಾಗಿ ಆಗಲಾರದು. ಕುಟುಂಬ, ಗ್ರಾಮ, ಒಂದು ಗುಂಪು ಇವುಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ನಮೂನೆಯ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುವದೇ ಹೆಚ್ಚು.
2. ಈ ತಂತ್ರದಿಂದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಕಾರ್ಯವನ್ನು ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ತಂತ್ರವು ಸುಲಭವೂ, ನಿಯಂತ್ರಣಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಬಹುದಾದಂತಹದೂ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾದುದು ಆಗಿದೆ.
3. ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿಯು ಒಂದೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ನಂತರ ಒಂದೇ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವದು.
4. ಸಮಯ ಮತ್ತು ಹಣದ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.
5. ಯಾವುದೇ ಪ್ರದೇಶದ ಗ್ರಾಮವನ್ನು ಅಥವಾ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೂ ಅಥವಾ ಒಂದು ಕುಟುಂಬವನ್ನು ಸಂದರ್ಶನಕ್ಕೆ ಕರೆದರೂ ಅಲ್ಲಿಯ ಸದಸ್ಯರೆಲ್ಲರೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೊಡುವರು. ಹೀಗಾಗಿ ಈ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿತ್ವ ಹಂಚಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಲಾರದು.
6. ಒಂದೇ ಉತ್ತರದಿಂದ ಕೂಡಿದ ಗುಚ್ಛಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರಗಳು ಪಕ್ಷಪಾತದಿಂದ ಕೂಡುವ ಸಂಭವವಿದೆ.
7. ಎಲ್ಲ ಕುಟುಂಬಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಗ್ರಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಪಟ್ಟಣದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೆಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಸ್ಥಳದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಲಕ್ಷವಿರುವುದರಿಂದ ಜನರಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿತ್ವ ದೊರೆಯದೆ ನಮೂನೆಯ ಉದ್ದೇಶವು ಸಾರ್ಥಕವಾಗಲಾರದು.

ಆದರೂ ಬೃಹತ್ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸಮೀಕ್ಷೆಗೆ ಮೂಲ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಎಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟಕಗಳು ದೊರೆಯದಿದ್ದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯೊಂದೇ ಅಂತಹ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವಂತಹದಾಗಿದೆ.

(iv) ಬಹು ಹಂತ ನಮೂನೆ (Multislage Sampling)

ಈ ವಿಧದ ನಮೂನೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಉದ್ದೇಶವೇನೆಂದರೆ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಗುಚ್ಛ ನಮೂನೆಯ ದೋಷಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು. ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ

ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಂದಲೂ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದರಿಂದ ಗುಂಪಿನ, ಅಥವಾ ಗ್ರಾಮದ ಅಥವಾ ಆಯ್ಕೆಯಾದ ನಗರಭಾಗದ ಉತ್ತರಗಳು, ಒಂದೇಯಾಗಿರುವವು ಇದನ್ನು ಸುಧಾರಿಸುವದೇ ಈ ನಮೂನೆಯ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಈ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾದ ಗುಚ್ಛಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ಗುಂಪುಗಳಿಂದ ಪುನಃ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಕೆಲವು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲವೇ ಉಪಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲಾಗುವದು. ಈ ಉಪಗುಂಪುಗಳಿಂದ ವಿವರ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬಹುಹಂತ ನಮೂನೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳಿಂದ ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗದು. ನಂತರ ಮೂರನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಉಪ–ನಮೂನೆಯ ಗುಂಪನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗುವದು. ಇದರಿಂದ ಬಹುಹಂತ ನಮೂನೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು. ಇದರಿಂದ ಆಯ್ಕೆಯಾದ ಎಲ್ಲ ಗುಂಪುಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ದೊರೆಯುವದು. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸದಸ್ಯರ ಉತ್ತರಗಳು ಒಂದೇ ಬಗೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ಗುಂಪುಗಳ ಸದಸ್ಯರ ಉತ್ತರಗಳು ಒಂದೇ ಬಗೆಯಾಗಿರಲಾರವು. ಜೊತೆಗೆ ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಗುಂಪು ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಸೇರಿಸಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವದರಿಂದ ಈ ನಮೂನೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಬಹುತೇಕ ಸಮೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಬಹುಹಂತ ನಮೂನೆಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

2. ಅಸಂಭವನೀಯತೆಯ ನಮೂನೆ (Non - probability samples)

ಅಸಂಭವನೀಯತೆಯ ನಮೂನೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಮೂನೆಯೆಂತಲೂ ಅಥವಾ ನಿಖರವಾದ ನಮೂನೆಯೆಂದೂ ಕರೆಯುವರು. ಉದ್ದೇಶಿತ, ನ್ಯಾಯ ನಿರ್ಧಾರಿತ ಅಥವಾ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತ ನಿರ್ಧರಿಸಬಲ್ಲ, ಪ್ರಾತಿನಿಧಿತ್ವದಿಂದ ಕೂಡಿದ ಮತ್ತು ಸರಿಯಾದ ಪಾಲನ್ನು ಪಡೆಯುವ ತಂತ್ರ ಇದಾಗಿದೆ.

ಈ ತಂತ್ರದ ನಮೂನೆಗಳಲ್ಲಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವಾಗ ಕೇವಲ ಅಂದಾಜಿನ ಮೂಲಕ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡದೆ; ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಞಾನ ಅನುಭವ, ಸ್ವಯಂ, ಪ್ರೇರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಿಣಿತೆಯಿಂದ (ಘಟಕಗಳನ್ನು), ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹಂತದ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಪಾತವಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಕಡಿಮೆ.

ಈ ಅಸಂಭವನೀಯ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ.

1. ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕ ನಮೂನೆ (Representatitive Sampling)
2. ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತ ಪರಿಜ್ಞಾನ ನಮೂನೆ (Judgement Sampling)

ಗುಣಗಳು (Merits)

1. ಅಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾದ ಬಲು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜನರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಪದರುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಅವುಗಳಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳನ್ನು ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವವು ಸರಿಯಾಗಿ ದೊರೆಯುವದು.
2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಪದರು ಅಥವಾ ಗುಂಪಿನ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನಡೆಸಲು ಬರುತ್ತದೆ.
3. ಈ ತಂತ್ರದ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಖರತೆ ಕಂಡು ಬರುವದು.
4. ಸಂಕೀರ್ಣತೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಸರಳವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯವು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.
5. ಇದರಿಂದ ಇಡೀ ಜನಸ್ತೋಮದ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ನಮೂನೆ ದೊರೆಯುವದು. ನಮೂನೆ ತೆಗೆಯುವಾಗ ತಪ್ಪುಗಳಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವದು.
6. ಭೌಗೋಳಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಪದರುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಭೂಪ್ರದೇಶದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವ ದೊರೆತಂತಾಗುವದು.

ದೋಷಗಳು (Demerits):

1. ಈ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದರುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ನಮೂನೆಗಳ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವದು ಸುಲಭವಾದುದಲ್ಲ.
2. ಸಂಪೂರ್ಣ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಪದರುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಸಂದೇಹವು ಸದಾ ಕಾಡುತ್ತಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಆಧಾರ ಯಾವುದನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕೆಂಬ ಸಂಶಯ ಬರುವದು.
3. ಒಂದು ಪದರಿನ ಸರಹದ್ದು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಎಂಬುದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿಲ್ಲದ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸುವದು ಕಠಿಣವಾಗುವದು.
4. ಎಲ್ಲ ಪದರುಗಳು ಸಮವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ ಸತ್ಯದಿಂದ ಕೂಡಿರಲಾರದು.

(iii) ಗುಚ್ಛ ಪ್ರತಿಚಯನ ನಮೂನೆ (Cluster Sampling):

ಈ ವಿಧಾನದ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಗುಚ್ಛ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವದು. ಎಲ್ಲಿ

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟಕಗಳು ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಗುಚ್ಛ ಪ್ರತಿಚಯನ ತಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವದು.

ನಮೂನೆಯಿಂದ ಮೇಲೆ ಅದು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಂದ ನಿರ್ವಹಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ ಕೆಲವು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಗುಂಪನ್ನೇ ಗುಚ್ಛಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಘಟಕಗಳ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಗುಚ್ಛದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಮಾಹಿತಿ ಕೇಳಿ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಗುಚ್ಛ ಅಥವಾ ಗುಂಪು ನಮೂನೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವದು. ಒಂದು ಊರಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿ–ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬೇಕಿದ್ದರೆ ಆ ಗ್ರಾಮದ ಕೆಲವು ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಕುಟುಂಬದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಿದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೇ ಗುಚ್ಛ ಅಥವಾ ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗುಚ್ಛ ಎಂದರೆ ಕುಟುಂಬವೆಂದು ಅರ್ಥವಾಗುವದು.

ಇದರಂತೆ ಭಾರತದಾದ್ಯಂತ ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಗ್ರಾಮಗಳನ್ನು, ಅದರಂತೆ ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ನಗರಗಳ ದೊಡ್ಡದೊಡ್ಡ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಂದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಅದರ ಸರಾಸರಿ ತೆಗೆದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಭಾರತದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಗುಚ್ಛಗಳೆಂದರೆ ಹಳ್ಳಿಗಳು ಅಥವಾ ನಗರದ ಭಾಗಗಳೆಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅನುಕೂಲತೆಗಳು (Merits)

1. ಮೂಲ ನಮೂನೆಯ ಚೌಕಟ್ಟನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟಕಗಳು ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಈ ತಂತ್ರವು ಬಹಳ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿರುವುದು.
2. ಈ ತಂತ್ರದಿಂದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಕಾರ್ಯವನ್ನು ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ತಂತ್ರವು ಸುಲಭವೂ, ನಿಯಂತ್ರಣಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಬಹುದಾದಂತಹದೂ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾದುದು ಆಗಿದೆ.
3. ಗುಂಪು ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿಯು ಒಂದೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ನಂತರ ಒಂದೇ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವದು.
4. ಸಮಯ ಮತ್ತು ಹಣದ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವನೀಯ ನಮೂನೆ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವಾಗ ಅಂದಾಜಿನಿಂದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಜನ ಸಮುದಾಯದ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವಾಗ ಆ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತೆ ಅಂದಾಜಿನ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ನಮೂನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಾಗುವುದು.

ಸಂಭವನೀಯತೆ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಪುನಃ ನಾಲ್ಕು ಉಪ-ವಿಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆ (Simple Random Sampling)

(ii) ಪದರು ಸಗಟು ನಮೂನೆ (Stratified Random Sampling)

(iii) ಗುಚ್ಛ ಪ್ರತಿಚಯನ ನಮೂನೆ (Cluster Sampling)

(iv) ಬಹು ಹಂತ ನಮೂನೆ (Multislage Sampling)

(i) ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆ (Simple Random Sampling)

ಈ ತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ನಮೂನೆಯ ಒಂದು ದೊಡ್ಡದ್ದಾಗ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಪಡೆದು ಅಥವಾ ಕಲೆಹಾಕಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಉಪಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಮಾಹಿತಿಯ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಿಂದ (ಅದರಲ್ಲಿಯೇ) ಮತ್ತೊಂದು ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದಂತೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಒಂದು ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ 10 ಲಕ್ಷ ಜನತೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಉಪ ಆಯ್ಕೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಜನರನ್ನು ಆರಿಸಿ ಪುನಃ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನೂರು ಜನರನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಲೆಹಾಕುವದು. ಈ ರೀತಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆಯೆಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವದರಿಂದ ಇಡೀ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿತ್ವವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಅತೀ ಸರಳವಾದ ತಂತ್ರವೆಂದರೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲಾದ ದೊಡ್ಡದಾದ ಗುಂಪಿನ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಕಾಗದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದು. ಇಂತಹ ಬರೆದ ಎಲ್ಲ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಒಂದೆಡೆ ಇಟ್ಟು ಅವುಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರಿಕೆ (ಕಲೆಸ)ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲ ಕಡೆಯಿಂದಲೂ ಸಮವಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಆ ಹೆಸರುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಚಿನ್ಹೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಆ ಚಿನ್ಹೆ ಹಾಕಲ್ಪಟ್ಟ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಗುಂಪಿಗೆ ಸರಳ ಸಗಟು ನಮೂನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಉಪಯೋಗ (Merits)

1. ಈ ತಂತ್ರವು ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾದ ಜನಸಮುದಾಯದ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವಾಗ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.
2. ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಹಣದ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅವಗುಣಗಳು (Demerits)

1. ಆದರೆ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತುವ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಪಾತವು ನಡೆಯುವ ಸಂಭವವುಂಟು.
2. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಮೂನೆಯು ದೊಡ್ಡದಿರದಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಇದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
3. ಈ ತಂತ್ರ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಅಸಂಭವನೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.
4. ಜನಸಮುದಾಯ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಹಣದ ಅಪವ್ಯಯವಾಗದು.

(ii) ಪದರು ಸಗಟು ನಮೂನೆ (Stratified Random Sampling)

ಈ ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಮೊದಲು ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಚಿಕ್ಕಚಿಕ್ಕ ಘಟಕಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುವರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿದ ಚಿಕ್ಕಚಿಕ್ಕ ಘಟಕಗಳಿಂದ (ಗುಂಪಿನಿಂದ) ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೇ ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೆ ಇದು ಪದರು ಸಗಟು ನಮೂನಾ ಪದ್ಧತಿಯಾಗುವದು. ಪುನಃ ಆಯ್ಕೆಯಾದ ಈ ಚಿಕ್ಕಚಿಕ್ಕ ಘಟಕದಿಂದ (ಗುಂಪಿನಿಂದ) ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದ ಘಟಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಪದರು (Strato) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಜನಸಮುದಾಯದಿಂದ ಮೊದಲು ನಮೂನೆಗಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು N – ಐದು ಸಾವಿರ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಇದನ್ನು 50 ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದರೆ, $N_1, N_2, N_3, N_4, ...N_{50}$, ಆಗುವವು. A_1, A_2. ಒಂದು ಪದರು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಯೊಂದು ಗುಂಪಿಗೂ ಒಂದು-ಒಂದು ಪದರು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಯೊಂದು ಗುಂಪಿಗೂ ಒಂದು-ನೂರು ಜನರು ಇಲ್ಲವೆ ನೂರರ ಘಟಕ ಬರುವದು. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದರಿನಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ 10 ಜನರನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಡಿದರೆ $50 \times 10 = 50$ ಜನರು ಬರುವರು. ಇದು ನಮೂನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಐದು ಸಾವಿರ ಜನರ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳೆಂದರೆ 500 ಜನರು ಮಾತ್ರ, ಇದು ಪದರು ಪದುರಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ತಂತ್ರವಾದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಪದರು ಸಗಟು ನಮೂನೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು (Definitions)

ನಮೂನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅನೇಕ ವಿದ್ವಾಂಸರು ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದವುಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

"ಬೃಹತ್ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಿಕ್ಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯೇ ನಮೂನೆ"

–ಗೂಡ್ ಮತ್ತು ಹ್ಯಾಟ್ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ

ಸನ್‌ಲಿನ್‌ರ ಪ್ರಕಾರ "ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾದ ಉಪ-ಗುಂಪಿಗೆ ನಮೂನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಜನಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸೀಮಿತ ಉಪವಿಭಾಗವನ್ನು ಮಾದರಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತದೆ. A finite subset of statistical individuals in a populations is called a sample or "The part of the population" is known as sample ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾದರಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(The group of individuals under study is known as population).

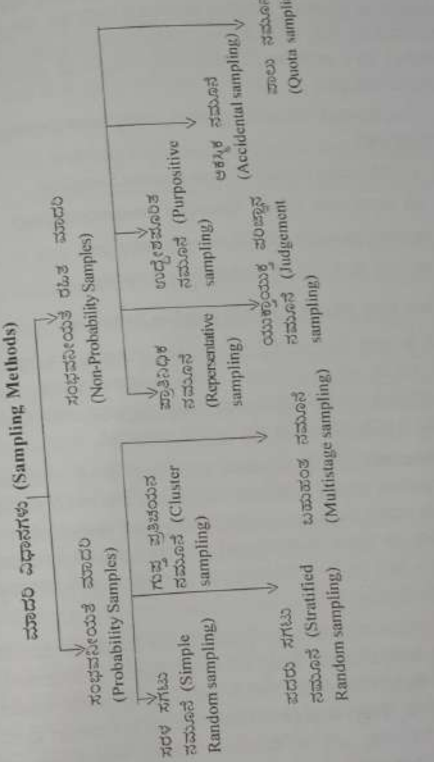
ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಒಟ್ಟು ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕದಾದ ಛಾಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬೇಕು.

ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಹಾಗೂ ಉತ್ತಮವೆಂದು ಹೇಳುವ ಯಾವ ತಂತ್ರವೂ ಇಲ್ಲವಾದರೂ ಆಯಾ ಜನಸಮುದಾಯಗಳ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹಿಸುವಿಕೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳಾಧಾರದ ಮೇಲೆ ಉತ್ತಮವಾದ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾರಗಳು (Types of sampling technique)

ನಮೂನೆಯ ತಂತ್ರವನ್ನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ವಿಧದಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

1. ಸಂಭವನೀಯತೆ ನಮೂನೆ (Probability Sampling)
2. ಅಸಂಭವನೀಯತೆ ನಮೂನೆ (Non -Probability Sampling)



5. ಮಾದರಿ – ಮಾದರಿ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತಗಳು

(Sampling - Principal Steps in a sample suvey)

1. ಮಾದರಿಯ ವಿಧಾನಗಳು
   (Methods of Sampling)
2. ಮಾದರಿ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪಾತ್ರ
   (Role of Sampling Theory)
3. ರ್‍ಯಾಂಡಮ ಮಾದರಿಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು
   (Properties of Random Samples.)

1. ಮಾದರಿ(ನಮೂನೆ)ಯ ತಂತ್ರಗಳು (Sampling Techniques)

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ, ಕುಟುಂಬ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರದ ಆದಾಯ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಗಯಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲೆ ಹಾಕುವುದೆಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸುವದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಸಮಯ, ಹಣ ಮೊದಲಾದವುಗಳು ಅಧಿಕ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸುವ್ವದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.
ಉದಾಹರಣೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಜನ ಸಮೂಹದ ಎರಡು ಲಕ್ಷ ಜನರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲೆ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಕಷ್ಟ ಇಷ್ಟೊಂದು ಜನರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಲು ಶ್ರಮಿಸಿದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ವೇಳೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಬೇಕಾಗುವದು? ಇಷ್ಟೊಂದು ಜನರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಲು ಶ್ರಮಿಸಿದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಿಗೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ ರೂಪಿಸಲು, ನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಬರಲು ಎಷ್ಟು ಪರಿಶ್ರಮ ಬೇಕಾಗುವದು? ಆರ್ಥಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಗಮನಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಖರ್ಚಾಗಬಹುದು? ಈ ಎರಡು ಲಕ್ಷ ಜನರ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕರೂಪದಲ್ಲಿ ತರುವ ವಿಧಾನವಾದರೂ ಹೇಗೆ? ಇದು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಯಾವಾಗ ಮಾಡಬಹುದು? ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ ತಪ್ಪುಗಳೆಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಎಷ್ಟು ನಿಖರತೆ ಇದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗವಹುದು? ಎಷ್ಟು ಜನಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಅವರಿಗೆ ಸಹಾಯಕರು ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗಬಹುದು? ಇವೆಲ್ಲ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿಯೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ

ಅಂಕಿ-ಅಂಶ ಕಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರಸಂಗ ಬರಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇವೆಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು "ನಮೂನೆ" (ಮಾದರಿ)ಯನ್ನು ಅಧರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ನಮೂನೆ(ಮಾದರಿ) ಎಂದರೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಎರಡು ಲಕ್ಷ ಜನತೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಎರಡು ನೂರು ಜನರನ್ನು ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ, ಆ ಜನರನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ, ಎರಡು ಲಕ್ಷ ಜನತೆಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಈ ಎರಡುನೂರು ಜನರು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲೆಹಾಕುವುದಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಅನುಪಾತಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಅಂದರೆ 1:10 1:25, 1:10 ಇಲ್ಲವೆ 1:1000 ಹೀಗೆ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲೆ ಹಾಕಲು ಅನುಕೂಲಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಉತ್ತರಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ನಮೂನೆಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಬೀದರ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಒಟ್ಟು ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಒಂದೇ ತಾಲೂಕಿನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಒಟ್ಟು ಆ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಾಲೂಕಿನಿಂದಲೂ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಅದು ಇಡಿಯಾಗಿ ಆ ಸಮೂಹವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲರ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಭಾಗಿಸಿ, ಅದರ ಭಾಗಲಬ್ಧರಿಂದ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಜಿಲ್ಲೆಯ ನಾಗರಿಕ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವಾಗುವದು. ನಮೂನೆಯ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನ್ಯಾಯಾಧೀಶ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ನಮೂನೆಯ ಆಯ್ಕೆಯ ಸರಿಯಾಗದಿದ್ದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯತತ್ವಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಠಿಣವಾಗುವದು.

ಮಾದರಿಯ ಅರ್ಥ (Meaning of sampler) : "ಕಠಿಣವಾದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ" ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು ಅಸಂಖ್ಯ ಜನತೆಯ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈಗಿರುವ ಸಾಧನಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿ, ಯೋಗ್ಯವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಿದ ನ್ಯಾಸ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸುವ್ವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಅದರ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ಲಕ್ಷಾವಧಿ ಜನತೆಯ ವಿವಿಧ ವಿಷಯದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಸಾಧನವೇ ನಮೂನೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ನಮೂನೆಯ ಆಯ್ಕೆಯ ಕಾರ್ಯ "ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೂಡುವ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದಂತೆ ಇರಬೇಕೆಂದು" ಹೇಳುತ್ತಾರೆ ಅಂದರೆ ಉದ್ದೇಶ ಮತ್ತು ಪರಿಶ್ರಮ ಸಾರ್ಥಕವಾಗುವದು.

ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಳತೆಗಳು ಸಂಶಯಾಸ್ಪದವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಬಳಕೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬಹುದೂರದ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತೂಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಸರಿಯಾದ ಅಳತೆಗೋಲುಗಳಾಗಲಿ ಅಥವಾ ತೂಕದ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಳತೆಗೋಲು ಅಥವಾ ತೂಕದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಳಸದೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತೂಕಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಅತಿ ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

ಸರಳ ಸಹಸಂಬಂಧ correlation ಗುಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಂದ ಬದಲಿಸುವ ಮೂಲಕ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಈ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಗುಣಾಂಕವು ಘಟಕಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ನೀಡಿದ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸರಳರೇಖಾ ಸಂಬಂಧದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ ರವರ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂದ ಸೂತ್ರ.

$$r_1 = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^2 - n} \quad \text{... (4)}$$

ಇಲ್ಲಿ n = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಚಲಕಕ್ಕೆ ನೀಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಚಲಕಕ್ಕೂ ನೀಡಿದ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಚಲನೆ. ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರ.

$$r_1 = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \ldots\ldots\right]}{n(n^2 - 1)}$$

ಇಲ್ಲಿ $m_1, m_2 \ldots$ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $\frac{m_1^3 m_1}{12}$ ಅವುಗಳಿಗನುಗುಣವಾದ ಸರಿಪಡಿಸುವ ಅಂಶಗಳು (Correction factors)

ಆಗಿವೆ. ಈ ತಿದ್ದುಪಡಿಯು ಎರಡೂ ಚಲಕಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಮೂರು ಮೌಲ್ಯಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೂ ತಿದ್ದುಪಡಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಇದು ಒಂದು ಮೌಲ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಸರಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಎಲ್ಲಾ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಇಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ರವರ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದಂತೆ ಇದೂ ಸಹ 1 ಮತ್ತು –1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೂ ಸಹ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನದಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಕುರಿತಾದ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದ ಸರಣಿಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಪ್ರಾರಂಭದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಬಹುತೇಕವಾಗಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಒಂದು ಕೇಂದ್ರಿಯ ಮೌಲ್ಯದ ಸುತ್ತಲೂ ಗುಂಪಾಗಿದ್ದು ಜೋಡಣೆಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಪ್ರಾರಂಭದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಾರಂಭದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ r ಮತ್ತು r_1ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ಪ್ರಾರಂಭದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಅತಿರೇಖ(ವಿಪರೀತ) ಮೌಲ್ಯಗಳು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ. ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ರವರ ಸಹಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ r_1ಯು rಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ rಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.
2. ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದರೇನು? ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ತಿಳಿಸಿ.
3. ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಹಸಂಬಂಧಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
4. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎಂದರೇನು? ಅದರ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.
5. ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಅಳತೆಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
6. ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್ ರವರ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
7. ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ಸನರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

* * *

$$Y_{xy} = \frac{\text{Covariance}\,(x, y)}{\sqrt{\text{Variance}(X) \times \text{Variance}(Y)}}$$

$$Y_{xy} = \frac{\text{Covariance}\,(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

$$Y_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\left[\Sigma(x-\bar{x})^2\right]\left[\Sigma(y-\bar{y})^2\right]}}$$

ಇಲ್ಲಿ

Y_{xy} = Measure of correlation

$\bar{x}$ = Mean of variable x

σ_x = Standard deviation and var x

$\bar{y}$ = Mean of var y

σ_y = Standard deviation of y

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸರಳೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$Y_{xy} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

ಇಲ್ಲಿ n ಅವಲೋಕನಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಗುಂಪಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಗುಂಪಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ

$$Y_{xy} = \frac{N\Sigma\Sigma xy f_{xy} - (\Sigma x f_x)(\Sigma y f_y)}{\sqrt{\left[N\Sigma x^2 f_x - (\Sigma f_x)^2\right]\left[N\Sigma y^2 f_y - (\Sigma y f_y)^2\right]}}$$

ಇಲ್ಲಿ

f_{xy} = Bivariate frequencies

f_x = Marginal frequencies of x

f_y = Marginal frequencies of y

N = Total frequency of the given bivariate frequency destination.

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ

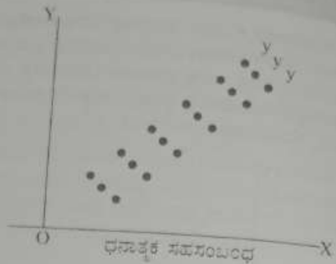
$$Y_{xy} = \frac{\text{Covariance}\,(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು Properties of correlation coefficient

1. r ಗೆ ಯಾವುದೇ ಮೂಲಮಾನವಿಲ್ಲ. ಅದು ಒಂದು ಶುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅಳತೆಯ ಮಾನಗಳು r ದ ಭಾಗವಾಗಿಲ್ಲ.
2. r ನ ಋಣಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯವು ವಿಲೋಮ (inverse) ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾ : ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ ಏರಿದಾಗ ಅದರ ಬೇಡಿಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ವೇಳೆ r ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಎರಡೂ ಚಲಕಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಉದಾ ಕಾಫಿಯ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಚಹಾದ ಬೇಡಿಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ತಾಪಮಾನ ಏರಿದಂತೆ ಐಸ್ ಕ್ರೀಮ್‌ಗಳ ಮಾರಾಟ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.
4. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯವು, -1 ಮತ್ತು $+1$ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ r ನ ಮೌಲ್ಯವು ಈ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
5. ಒಂದು ವೇಳೆ $r = 1$ ಅಥವಾ $r = -1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಒಂದು ವೇಳೆ $r = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಚಲಕಗಳು ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಸರಳರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲ.
7. r ನ ಕಡಿಮೆ ಮೌಲ್ಯವು ದುರ್ಬಲ ಸರಳರೇಖಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
8. r ನ ಅಧಿಕ ಮೌಲ್ಯವು ಬಲವಾದ ಸರಳರೇಖಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
9. r ನ ಮೌಲ್ಯವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (origin) ಉಂಟಾದ ಬದಲಾಣೆಯಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿಸುವುದು.

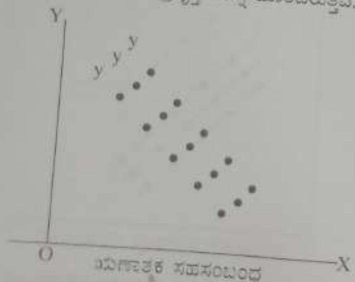
ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್ ರವರ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧ (Spearman's rank correlation)

ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್ ರವರ ಶ್ರೇಣಿ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಮನಃಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಸಿ. ಎಡ್. ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್ ರವರು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಬೆಲೆ, ಆದಾಯ, ತೂಕ ಮುಂತಾದ ಚಲಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಲು



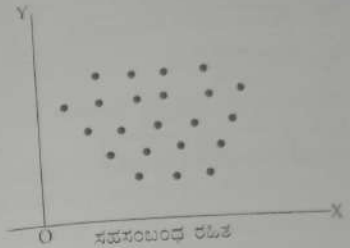
ರೇಖಾಚಿತ್ರ 4.3: ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

4. ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (**Negatively Correclation**) : ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಬಿಂದುಗಳು ಇಳಿಮುಖ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿದರೆ ಅಂತಹ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಿತ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಇಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ಕೆಳಮುಖ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.



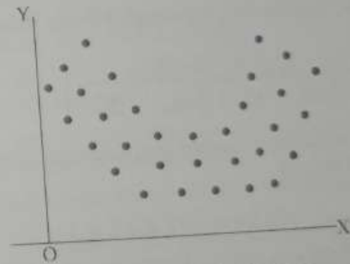
ರೇಖಾಚಿತ್ರ 4.4: ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

5. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ರಹಿತ (**Non-correcated**): ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಯಾವುದೇ ಸ್ಪಷ್ಟ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ರಹಿತ ಸಂಬಂಧ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಯಾವುದೇ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.



ರೇಖಾಚಿತ್ರ 4.5: ಸಹ ಸಂಬಂಧರಹಿತ

6. ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (**Non-lineal Correcation**) : ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ವಕ್ರರೇಖೆ ಕಂಡು ಬಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ವಕ್ರರೇಖೆ ಸಂಬಂಧಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

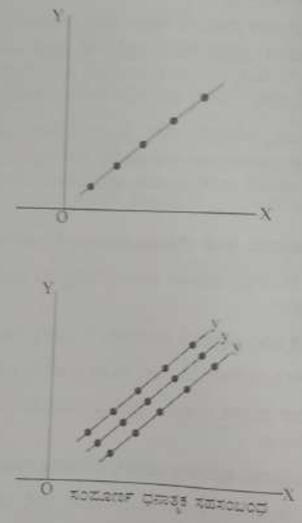


ರೇಖಾಚಿತ್ರ4.6: ವಕ್ರರೇಖೆ ಸಹಸಂಬಂಧ

2. ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್ಸನ್ ರ ಗುಣಲಬ್ಧ (**Karl Pearson's coefficient**): ಇದು ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖೀಯ ಸಂಬಂಧದ ಮಾಪನವಾಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧದ r ಮತ್ತು y ದ ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಗುಣಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರಸನ ಅವರ ಎರಡು ಚಲಪರಿಮಾಣಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇಂತಿದೆ.

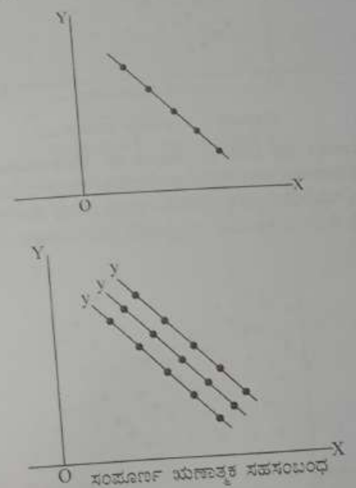
ಎರಡು ಚಲಕದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಒಂದು ಚಲಕದ ಬೆಲೆ x ಅಕ್ಷ [illegible] ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು y ಲಂಬಾಕ್ಷದ ಗುಂಟ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಎರಡು ಚಲಕ [illegible] ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗೆ (x,y) ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆ (star) ಗುರುತಿಸ [illegible] ಎಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಷ್ಟು ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಮೂಡಿಸಬೇಕು. ಆ ಚುಕ್ಕೆಗಳು [illegible] ದಿಕ್ಕಿನತ್ತ ಇವೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

1. **ಸಂಪೂರ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (Perfectly positive correlation)**: ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಅವು ಒಂದು ನೇರ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಮೇಲ್ಮುಖ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.



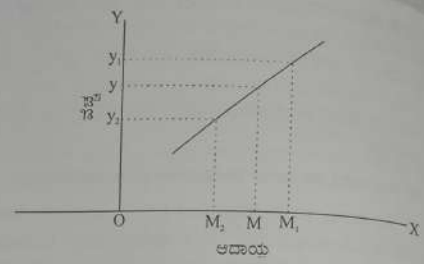
ಚಿತ್ರ 4.1: ಸಂಪೂರ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

2. **ಸಂಪೂರ್ಣ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (Perfectly negative correlation)** : ಎರಡ ಚಲಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಇಳಿಮುಖ ರೇಖೆಯು ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದು (ಚುಕ್ಕೆಗಳ) ಮಾರ್ಗ ಕೆಳಮುಖ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.



ರೇಖಾಚಿತ್ರ 4.2: ಸಂಪೂರ್ಣ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

3. **ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (Positively correlation)** : ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ಕ್ಲಸ್ಟರ್ ಮೂಡಿದರೆ ಅಂತಹ ಸಹ ಸಂಬಂಧವು ಅಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

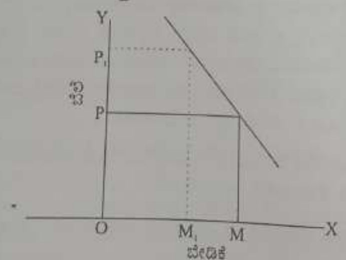


ರೇಖಾಚಿತ್ರ : ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

2. **ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ (Negative Correlation) :** ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳ ಸಂಬಂಧವು ತದ್ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಚಲಕದ ಪ್ರಮಾಣವು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಚಲಕದ ಪ್ರಮಾಣವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ (i) ಉತ್ಪಾದನೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ (O) ಅದರ ಬೆಲೆಗಳು (P) ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಬಿ. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ (P) ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣ (ii) ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ರೇಖಾಚಿತ್ರ : ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ

3. **ಶೂನ್ಯ ಸಹಸಂಬಂಧ (Zero or Non- Correlation):** ಒಂದು ಚಲಕದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚಲಕದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯ ಸಹಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ: (ಎ) ರೂಪಾಯಿಯ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ವಾತಾವರಣದ ತಾಪಮಾನಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲ. ಅದರಂತೆ

ಬಿ. ಮನುಷ್ಯನ ವಯಸ್ಸು 30 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಆತನ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಕಾರಣ (Co-reliation and Causation)

ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಪರಿಣಾಮದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾರಣ (Causation) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ವಿದ್ಯುನ್ಮಾನದ ಸರಕು (Electronic goods) ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆ ಹೆಚ್ಚಳವು ಕಾರಣವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಪರಿಣಾಮ ಬೆಲೆಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ತೋರಿಸದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬುದ್ಧಿಗೇಡಿ (Non sense or spurions correcltion) ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭಾರತದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಚೀನಾದೇಶದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆ.

ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಅಳತೆ (Measurement of correlation)

ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೂರು (3) ವಿಧಾನಗಳಿವೆ.

1. ಹರಡಿಕೆ (ಚೆಲ್ಲ ಪಿಲ್ಲಿಯಾಗಿ ಹರಡಿರುವ) ರೇಖಾಚಿತ್ರ (Scattered diagram)
2. ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ಸನ ಗುಣಲಬ್ಧ (Karl pearson's coeffieicat)
3. ಸ್ಪಿಯರ್ ಮನ್‌ರ ಗುಣಾಂಕ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (Spearman's rank correlation)

1. ಚೆಲ್ಲಪಿಲ್ಲಿಯಾಗಿ ಹರಡಿರುವ (ಚದರಿಕೆ) ರೇಖಾಚಿತ್ರ (Scattered diagram)

ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಚುಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನದ ಹರಡಿಕೆಯ ಚಿತ್ರ, ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಅತಿ ಸರಳ ಅಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನ ಇದಾಗಿದೆ.

ಹೋಲಿಕೆಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅವಲಂಬನೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಗಣಿತದ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಕೆಲವು ಹೋಲಿಕೆಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ. ಸಹ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ ಒಂದು ಐಟಂನಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಐಟಂನ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು (items) ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬದಲಾದಾಗ ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (covariance) ಎಂದು ಕರೆಯತ್ತಾರೆ. ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಹಸಂಬಂಧ (co-orelation) ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಾಧನವಾಗಿದೆ. ಸಹವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಹ ಸಂಬಂಧಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ತುಲನೆಯ ಪಟ್ಟಿ

ಆಧಾರ	ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	ಸಹ ಸಂಬಂಧ
ಅರ್ಥ	ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವುದು ಎರಡು ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.	ಸಹಸಂಬಂಧವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು ಚಲ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಎಷ್ಟು ಬಲವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ ಎಂಬುದು ಸೂಚಿಸಿದೆ.
ಏನಿದು	ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಅಳತೆ	ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಳತೆಯಾದ ಆವೃತ್ತಿ
ಮೌಲ್ಯ	$-\infty$ ಮತ್ತು $+\infty$ ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ	-1 ಮತ್ತು $+1$ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ
ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ	ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ	ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುವುದಿಲ್ಲ
ಯುನಿಟ್ ಉಚಿತ ಅಳತೆ	ಇಲ್ಲ	ಹೌದು

ಸಹವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Definition of co-variance)

ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವುದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಪದವಾಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು (pair) ರ‍್ಯಾಂಡಮ ಚಲ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಸ್ಥಿತಿ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಚಲ ಪರಿಣಾಮದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಇನ್ನೊಂದು ಚಲಪರಿಣಾಮದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೌಲ್ಯವು $-\infty$ ದಿಂದ $+\infty$ ಗಳ (infinity) ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ. ಋಣಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯವು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮೌಲ್ಯವು ಸೊನ್ನೆ (0)ಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಎರಡು (ಅವಲೋಕನದ) ಚಲಪರಿಣಾಮಗಳು ಒಂದೇಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು (Definition of co-reliations)

ಸಹ ಸಂಬಂಧವು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಿಷಯಗಳ ನಡುವೆ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಹಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. **"ಚಲಕಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದೇ ಸಹ. ಸಂಬಂಧ" ಎಂದು "ಪ್ರೊ. ಜಿ.ಎ. ಫರ್ಗೂಸನ್ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ."**

ಸಹ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ.

1. ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ
2. ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ
3. ಶೂನ್ಯ ಸಹಸಂಬಂಧ

1. **ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹಸಂಬಂಧ (Positive Correlation) :** ಒಂದು ಚಲಕದ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಎರಡು ಚಲಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಚಲಕಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ) ಸಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆ

   ಎ. ಕುಟುಂಬದ ಆದಾಯ (Y) ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅವರ ಅನುಭೋಗದ ವೆಚ್ಚವು (C) ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

   ಬಿ. ಹಣದ ಪೂರೈಕೆ (M) ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಬೆಲೆಗಳು (P) ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತವೆ.

ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವು ಎರಡು ಘಟಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. (ಎ) ನೀವು ಎಷ್ಟುಗಳಿಸಬಹುದು. (gain) ಎಂಬ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು (ಬಿ) ನೀವು ಎಷ್ಟು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (lose) ಎಂಬ ನಿರೀಕ್ಷೆ. ಇದು ಶೇರು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಜೂಜಾಟದಿಂದ ಹಿಡಿದು ಲಾಟರಿ ಟಿಕೇಟ್ ಖರೀದಿಸುವವರೆಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಲಾಭಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ Step - 1 :

ಎರಡು ಸಾಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಚಾರ್ಟ್‌ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಸಂಭವನೀಯತೆ ಚಾರ್ಟ್ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕಾಲಂಗಳಿರಬೇಕು. ಮೊದಲನೆ ಸಾಲು (Row) ಗಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಾಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಲೇಬಲ್ ಮಾಡಿ. ಮೊದಲನೆ ಕಾಲಂ ಗೆಲ್ಲುವ (win) ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಕಾಲಂ ನಷ್ಟ (lose) ಎಂದು ಲೇಬಲ್ ಮಾಡಿ.

ಗಳಿಕೆ (Gain)	ಗೆಲುವು (Win)	ಸೋಲು (Lose)
ಸಂಭವನೀಯತೆ Probability	9990	–10
1/1000	1/1000	999/1000

ಹಂತ Step - 2 :

ನೀವು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಗೆಲ್ಲಬಹುದು ಅಥವಾ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ. ಉದಾಹರಣೆ ನೀವು ಲಾಟರಿ ಟಿಕೇಟ್‌ನ್ನು ರೂ. 10ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಿರಿ. ರೂ. 10,000 ಗೆಲ್ಲುವ ಒಂದು ಅವಕಾಶ ನಿಮಗಿದೆ. ನಿಮ್ಮ ಸಾಂಭವ್ಯ ನಷ್ಟ ಟಿಕೇಟಿನ ಬೆಲೆ ರೂ. 10. ಅಂದರೆ ನಿಮ್ಮ ಸಾಂಭವ್ಯ ಲಾಭ ರೂ. 10,000. ಇದರಲ್ಲಿ ಟಿಕೇಟು ಮೊತ್ತ ರೂ. 10 ಕಳೆದರೆ. (10,0000–10) 9990=00 ರೂ. ಸಾಂಭವ್ಯ ಗಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಹಂತ Step - 3 :

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭಂದಿತ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಹಂತ 2 ರ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ. ನಷ್ಟವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು – 10 ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು. ಗೆಲುವು 9990ನ್ನು ನಮೂದಿಸಿ.

ಹಂತ Step - 4 :

ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುವ ನಿಮ್ಮ ವಿಚಿತ್ರತೆ (ಯ)ನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 1000 ಟಿಕೇಟುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟಮಾಡಿದರೆ ನಿಮ್ಮ ಗೆಲುವು 1000 ದಲ್ಲಿ 1 ಅಥವಾ 1/1000. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ 1/1000. ಇದನ್ನು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಚಾರ್ಟ್‌ನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿ.

ಹಂತ Step - 5 :

ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವ ನಿಮ್ಮ ವಿಚಿತ್ರತೆಯ (odd)ನ್ನು ಸಾಲಿನ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಗೆಲುವಿನ (odds) 1/1000 ಆಗಿದ್ದರೆ. ನಿಮ್ಮ ಸೋಲಿನ ವಿಚಿತ್ರ (odd)ವು 1000 ದಲ್ಲಿ 999 ಅಂದರೆ 999/1000.

ಹಂತ Step - 6 :

ಪ್ರತಿ ಕಾಲಂನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ಕಾಲಂನ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳ (Expected value) ಇಂತಿವೆ.

$$9990 \times \frac{1}{1000} \quad : \quad -10 \times \frac{999}{1000}$$

$$= \frac{9990}{1000} \quad : \quad = \frac{-9990}{1000}$$

$$= 9.99 \qquad = -9.99$$

ಹಂತ Step - 7 :

ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು (EV) ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ. (+9.99–9.99)

$$\begin{array}{r} +9.99 \\ -9.99 \\ \hline 0.00 \end{array}$$

ಉತ್ತರ 0 (ಶೂನ್ಯ). ಅಂದರೆ ಲಾಟರಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಟಿಕೆಟ್ ಖರೀದಿಸುವುದರಿಂದ ನಿಮ್ಮ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

3. ಸಹವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಕ Covariance and co-relation coefficients

ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎರಡು ಪದಗಳು ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇವೆರಡೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವ್ಯವಹಾರ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅವಲಂಬನೆಯಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಗಣಿತದ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಕೆಲವು

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಈ ಮೌಲ್ಯವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಸಾಂದ್ರತೆಯು ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯ f(x) ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ (0.1) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಏನೆಂಬುದು ಸಾಂದ್ರತೆ (density) ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯ (PDF) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಾಗಿದೆ ಅದು ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ವಿತರನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆ.

ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯ (Distribution Function)

ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯವು ಯಾವುದೇ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕಕ್ಕೆ ಸಂಭವಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಇದು ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ. ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯವನ್ನು F(x) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

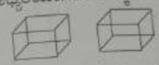
ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯ ಸಂಚಿತ ವಿತರಣಾ ಕರ್ಯ (Cumulative distributuion Function - CDF) ಅಥವಾ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆ (Cumulative Frequency Function - CFF) ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾದ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

2. ಜಂಟಿಯಾಗಿ ವಿತರಿಸಿದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳು(Jointy distributed Random Variables)

ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಲೇಬರ್ ಮಾಡಲಾದ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ X ಮತ್ತು Yಯನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಔಪಚಾರಿಕ (formal) ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ ಜಂಟಿ ವಿತರಣೆಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹುಡುಕುವುದು.

ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಎರಡು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. A ಘಟನೆಯು ಸಂಭವನೀಯತೆ P(A) ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಘಟನೆ Bಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(B) ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ಡೈ (die) ಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 5ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ.

ಹೀಗೆ ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಪ್ರತಿ ಡೈಗೆ ಆರು ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಡೈನಲ್ಲಿ 5 ಸಂಭವಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ 1/6 ಅಥವಾ 0. 1666.

$P(A) = 0.\ 1666$

$P(B) = 0.\ 1666$

$P(A.B) = 0.\ 1666 \times 0.\ 1666 = 0.02777$

ಇದರರ್ಥ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಡೈಗಳಲ್ಲಿ ಉರುಳುವ ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0.02777 ಆಗಿದೆ.

ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ (Importance of Joint Probability)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದಾದ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಬಳಸುವ ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಒಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ಅಂಶವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಡೌ ಜೋನ್ಸ್ (Dow Jones) ಕೈಗಾರಿಕಾ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿನ ಕುಸಿತವು ಡಾಲರ್ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯ ನಷ್ಟದೊಂದಿಗೆ, ಈ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಇದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವವು ಮತ್ತೊಂದು ಘಟನೆಯು ಸಂಭವವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಭಾವಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಜಂಟಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಬಹುಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಒಬ್ಬರು ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

2. ನೀರಿಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ (Computing expected value)

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯದ ಸೂತ್ರವು Ex = ಸಂಕಲನ x * P(x) ಎಲ್ಲಾ ಲಾಭಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅವುಗಳ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

4. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಮಾದರಿ ಮತ್ತು ಜಂಟಿಯಾಗಿ ವಿತರಿಸಿದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳು (Randam Sampling and Jointly Distribution Random Variables)

1. ಸಾಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ಜಂಟಿಯಾಗಿ ವಿತರಿಸಿದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳ ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯಗಳು
   (Density and distribution functions for Jointly Distribution Random Variables)
2. ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ (Composing expiated Variables)
3. ಸಹವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಕ
   (Covariance and correlation)

1. ಸಾಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ವಿತರಣೆ (Density and Distribution Functions)

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ, ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕ್ರಿಯೆ (Probability density function- pdf) ಅಥವಾ ನಿರಂತರ (ಸತತ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ಸಾಂದ್ರತೆಯು ಈ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಒಂದು ಕಾರ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯ (pdf) ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)d_x$$

ಇಲ್ಲಿ

$[a, b] = x$ ಇರುವ ಮಧ್ಯಂತರ

$P(a \le X \le b) = x$ ನ ಕೆಲವು ಮೌಲ್ಯ ಈ ಮಧ್ಯಂತರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

Problem ಸಮಸ್ಯೆ :

ದಿನದಲ್ಲಿ ಗಡಿಯಾರವು ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಅದು ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಯ x ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು x ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$$f_x = \begin{cases} 1/24 & \text{for } 0 \le x \le 240 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ಮಧ್ಯಾಹ್ನ 2 ರಿಂದ 2.45ರ ನಡುವೆ ಗಡಿಯಾರ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

Solution (ಪರಿಹಾರ).

ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

2 ಗಂಟೆಗೆ 14 ಗಂಟೆ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಅದರಂತೆ

2. 45 14. 45 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಅದರಂತೆ

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸೂತ್ರ

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)d_x$$

ಇಲ್ಲಿ P $a = 14$ ಮತ್ತು $b = 14.45$

$P = 1/24$ ಸಂಭವನೀಯತೆ ದಿನದ 24 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆ ಗಡಿಯಾರ ನಿಲ್ಲುವುದು.

$$P(14 \le x \le 14.45) = \int_{14}^{14.45} f(x)d_x$$

$$= \frac{1}{24}(14.45 - 14)$$

$$= \frac{1}{24}(0.45)$$

$$= \frac{0.45}{24} \qquad = 0.01875$$

ಚಲಕ ಅನ್ನು ಅದು ಪಾಯ್ಸನ್ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ (Possion Process) ಯನ್ನು [illegible] ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾಯ್ಸನ್ (i) ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಟೆಲಿ-ಸಂಚಾರ (tele-traffic) ಮತ್ತು ಸರದಿ (queuing) ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. [illegible] ಸಮಯ ಮತ್ತು ಸ್ಥಳ (space)ಗಳನ್ನು [illegible] ಅಪ್ಲಿಕೇಶನ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕರೆ (call) ವಿನಂತಿಗಳು ವಿನಿಮಯಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಮಯಗಳು, [illegible] ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ [illegible] ಸಮಯಗಳು, ಸರ್ವರ್ ವಿನಂತಿಗಳು ಸರ್ವರ್ ಬರುವ ಸಮಯಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವು T_x – ಶೂನ್ಯ (Zero- infinity) ಮತ್ತು [illegible] ತೆರೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಂಐಆರ ವಿತರಣಾ ಕಾರ್ಯ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$$F_T(t) = 1 - C^{\lambda t}, t \in (0, \infty)$$

ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್ ದರ λ (ಲ್ಯಾಂಬ್ಡಾ) ಯುನಿಟ್ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸಂಭವಿಸುವ ಸರಾಸರಿ (mean) ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಪಾಯ್ಸನ್ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಮುಂದಿನ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸುವವರೆಗೆ ಕಾಯುವಿಕೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

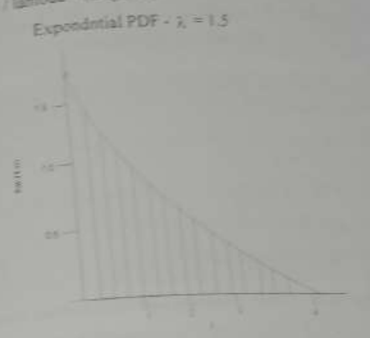
$$F_T(t) = \lambda e^{\lambda t}, t \in (0, \infty)$$

ವಿಲೋಮ ರೂಪಾಂತರ (inverse transform) ವಿಧಾನ (1)ವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಏಕರೂಪದ (Uniform Variable) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವು (0,1)ವನ್ನು ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮ್ಯಾಟ್‌ಲ್ಯಾಬ್ (Matlab) ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತ(Code) ಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಘಾತೀಯವಾಗಿ ವಿತರಿಸಿದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು. ಇದರ (Probability distribution function) pdf ಅನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$F^{'}(\mu) = \frac{\ln(1-\mu)}{\lambda}, \mu E(0,1)$$

1. Function T = expRV (Lambada, L)
2. Generate random number sequencce that is exponentialy distributed.

3. Lambda-rate parameter. L=Length of the sequence generated.
4. U = ran (1,2L), Continuous uniform random numbers in (0, 1).
5. T = 1 / lambda * (Log (1-u)



ಚಿತ್ರ : 1 ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದಿಂದ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿದ pdf

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ ಎಂದರೇನು? ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿ.
2. ಸತತ ಮತ್ತು ಅಸತತ ಚಲಕಗಳೆಂದರೇನು? ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿ.
3. ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ :
   (a) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ
   (b) ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕದ ಕಾರ್ಯಗಳು.
   (c) ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ.
   (d) ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆ.

****

4. ಸರಾಸರಿ (M) ಯಿಂದ ಎಡ ಅಥವಾ ಬಲಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ರೇಖೆಯ ವಿಸ್ತಾರ ನಿಶ್ಚಿತ ದರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.
5. ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾದರಿಗಳಿದ್ದಲ್ಲಿ ಎತ್ತರ ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ.
6. ರೇಖೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆ ಎರಡು ತುದಿಗಳು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ತಗಲಿದಂತೆ ಕಂಡರೂ ತಾಕಿರುವುದಿಲ್ಲ. ರೇಖೆ ಅನಂತ ವಕ್ರದ ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಅಸಿಂಪ್ಟೋಟಿಕ್ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಎನ್ನುವರು.
7. ಇದು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಏಕಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ 10,000 ಭಾಗಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು.
8. ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದೆ.
9. ಸರಾಸರಿ (M) ಯು. ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಏಕರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
10. ರೇಖೆಯ $(Z+1\sigma)$ ಮತ್ತು $(z-1\sigma)$ ಪರಿಶೀಮೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಫಲಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಶೇಕಡಾ 68 ರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.
11. ರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ N = ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು

$d = x - M$ ವಿಚಲನೆ (ಸರಾಸರಿಯಿಂದ)

$\frac{d}{\sigma} = Z$ ಅಂದರೆ $Z = \frac{x - M}{\sigma}$

ನೆಪೋರಿಯನ್ ಆಧಾರ = 2.7183

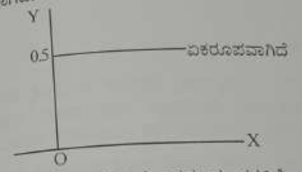
$$\pi = \frac{22}{7} = 3.142$$

5. ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆ (Uniform Distribution)

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಗೆ ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಲಕವು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳ ಪ್ಯಾಕ್‌ನೊಳಗೆ ಏಕರೂಪದ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

ಹೃದಯ (ಬದಾಮ heart), ಕ್ಲಬ್ (ಔಳಾವರ Club), ವಜ್ರ (ಚೌಕಟ್–diamond), ಸ್ಪೇಡ್ (ಗಾಡಿ–spade) ಸಮಾನವಾಗಿ ಸೆಳೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ನಾಣ್ಯವು ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆ ಹೊಂದಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ನಾಣ್ಯದ ಟಾಸ್(toss)ನಲ್ಲಿ ತಲೆ (Head) ಅಥವಾ ಬಾಲ(Tail)ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. P = 1/2

ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೇರ ಸಮತಳ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಹಾರಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ P = 0.5 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಾಣ್ಯವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಎರಡೂ ಸಂಭವನೀಯತೆ P = 0.5 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಏಕರೂಪದ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ.

(i) ಅಸತತ (discrete)

(ii) ಸತತ (ನಿರಂತರ) (continuous)

ಡೈ (die) ಅನ್ನು ಉರುಳಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅಸತತ (ಪ್ರತ್ಯೇಕ) ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಡೈಯಿಂದ 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6 ರೋಲ್ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಆದರೆ 1.5, 2.3, 5.5, 4.5, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ರೋಲ್ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ ಡೈನ ರೋಲನ ಪ್ರತಿ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೂ P = 1/6 ನೊಂದಿಗೆ ಅಸತತ ವಿತರಣೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಲವು ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಎತ್ತರ ಸತತ ಏಕರೂಪದ ವಿವರಣೆಯಾಗಿದೆ. ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಎತ್ತರ 5.6ಅಡಿಯಿದ್ದರೆ 0 ಅಡಿಯಿಂದ 5.6 ಅಡಿಯವರೆಗೆ 0. 1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 ಇತ್ಯಾದಿ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಸತತ ಅಥವಾ ನಿರಂತರ ಏಕರೂಪದ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

V. ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ (Exponetial Random Variables)

ಘಾತೀಯ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ನಿರಂತರ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ

III. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ

ಇದು ಮೂರನೆಯದ್ದು ಮತ್ತು ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದ ನಿರಂತರ ಸಂಭವನೀಯ ವಿತರಣೆ ಎಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಇದೂ ಸಹ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದೆ ಹೆಚ್ಚಾನು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಈ ವಿತರಣೆ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲಿದೆ ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಸುಮಾರು 1733 ರಲ್ಲಿ ಡಿಮಾರಿ (De-moivre) ಎಂಬುವರು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಅಲ್ಲದೆ ಗಾಸ್ ಮತ್ತು ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ಇವರೀರ್ವರೂ ಸಹ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

"ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯು ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಮಿತಿ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಯಾವಾಗ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಬಹಳ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆಯೋ p ಮತ್ತು q ಮತ್ತು ಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಸಣ್ಣದಿರುವುದಿಲ್ಲವೋ ಆವಾಗಿನ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಮಿತಿಯೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯು". $(n \to \infty, p \neq q \text{ or } p = q)$

$n \to \infty$ಯ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ನಿಯಮಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವನೀಯ (ಆವೃತ್ತಿ) ರೇಖೆ".

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವನೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/\sigma^2} \quad \text{......(1)}$$

N = ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

d = ವಿಚಲನದ = $x - M$

x = ಚಲಕ

M = ಸರಾಸರಿ

e = ನೆಪೋಲಿಯನ್ನರ ಆಧಾರ = 2.7 183

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.142$$

σ= ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ)

$$z = \frac{d}{\sigma} \therefore z^2 = \frac{d^2}{\sigma^2}$$

ಆದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma^{z^2/2}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಫಲನೆ ಎನ್ನುವರು.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ = σವು ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ

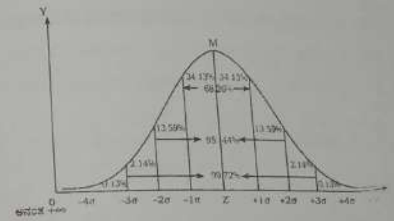
ಇಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಚಲಕ = x–ವು $-\infty$ ಮತ್ತು $+\infty$ ಈ ಎರಡು ಮಿತಿಗಳೊಳಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ m (ಸರಾಸರಿ) ಮತ್ತು σ (ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ)ಗಳು ಅದರ ಪ್ರಸಕ್ತ ನಿಯತಾಂಕಗಳು (Parameters)

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವನೀಯ ರೇಖೆ (ಸಾಂ.ಸಂ.ವ)

(Narmal Probability Curve-N.P.C)

"ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಆದರ್ಶ ರಚನೆಯನ್ನು ಸಾ.ಸಂ. ವಕ್ರ ಎನ್ನುವರು.



ರೇಖೆಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

1. ರೇಖೆಯ ಸ್ವರೂಪವು ಘಂಟಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ.
2. ರೇಖೆಯ ವಿಷಮತೆಯ ಗುಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ರೇಖೆಯು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆಯಲ್ಲದೇ ಯಾವ ಕಡೆಗೂ ವಾಲಿಲ್ಲ).
3. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬೀಳುತ್ತವೆ.

II. ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆ

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪೋಸಾವ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ 1837ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯು ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಮಿತಿ (limit) ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ

1. ವಿಷಯದ ಸಂಭವನೀಯತೆ [p] ಅತಿ ಸಣ್ಣದಿದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ $p \to 0$
2. ಒಟ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನ (Trial) ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n) ಬಹಳ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ $n \to \infty$ (∞ ಅನಂತ)
3. ಸರಾಸರಿ = np ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ np = m ಇದ್ದರೆ ದ್ವೀಪದ ವಿತರಣೆಯು ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ r–ವಿಜಯಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$= {}^{n}C_{4}\, qn^{n-r}p^{r}$ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಭವದ ಅಂದರೆ p(r) ದ ಮಿತಿ $n \to \infty, p \to 0$ ಮತ್ತು np=m ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿದ್ದಾಗ ಬರುವ ಮಿತಿಯೇ ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ r ವಿಜಯಗಳ ಸಂಭವವು ಇಲ್ಲಿ r = 0, 1, 2.........n

ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ np=m ಅಂದರೆ $p = \frac{m}{n}$ ಆದರೆ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿಯ r = ವಿಜಯಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$$P(r) = {}^{n}C_{r} P^{r} q^{n-r}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{(r-r^{1})......2\times 1} p^{2} q^{n-r}$$

ಅಂದರೆ $$p_{1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-4}} \left(\frac{m}{n}\right)^{r} \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-r}$$

$$\because [p = \frac{m}{n} p + q = 1, q = 1 - p]$$

$$= \frac{n^{r}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{[1-p]^{r}\, r(r-1).....2\times 1} (p)^{1} (1-p)^{r}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{[1-p]^{r}\, r\underline{|r}} (np)^{r} (1-p)^{n}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{[1-p]^{r}\, r\times\underline{|r}} (np)^{r} \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n}$$

$$p(r) \frac{1\times 1\times 1\times 1............1}{1\times\underline{|r}} m^{r} e^{-m}$$

$$\boxed{\because p(r) = \frac{m^{r}}{\underline{|r}} \times e^{-m}}$$

$\lim n \to \infty$

$$\because \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n} - e^{-m}$$ ಮತ್ತು

$$\xrightarrow[n\to 0]{\lim} (1-p) = 1$$

ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿಜಯಗಳ

ಸಂಭವನೀಯತೆ $= p(r) = \frac{m^{r}}{\underline{|r}} e^{-m}$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಚಲಕ ಎಂದರೆ ವಿಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಬೆಲೆಗಳು 0, 1, 2, 3.........ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಪದಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^{r}}{\underline{|r}} e^{-m}$$

"ನೇರವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ನೇರವಾಗಿ ವೀಕ್ಷಿಸುವುದರ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ವಿತರಣೆಗೆ ವೀಕ್ಷಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳೆನ್ನುವರು."

ಇನ್ನೊಂದೆಡೆ "ಕೆಲವು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಕಲ್ಪನೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾಗಿರುವ ವಿತರಣೆಗೆ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳೆನ್ನುವರು.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಮೂರು ಪ್ರಕಾರ ಮಾದರಿಯ ವಿತರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

1. ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ (Binomiol Distrubution)
2. ಪೋಸಾನನ ವಿತರಣೆ (Poissan Distrubution)
3. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ (Normal Distrubution)

ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರದ ವಿತರಣೆಗಳಾದ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು ಪೋಸಾನದ ವಿತರಣೆಗಳ (ಅಸತತ) ವಿಯುಕ್ತ (discrete) ಸಂಭವನೀಯ ವಿಚಾರಣೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವಿತರಣೆ ಅಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯು ನಿರಂತ (Continuous) ಸಂಭವನೀಯ ಪ್ರಮುಖ ವಿತರಣೆಯಾಗಿದೆ.

I. ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ (Binomiol Distrubution)

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ (Head-H) ಬೀಳಬಹುದು. ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ (Tail-T) ಬೀಳಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇದೆ. ಈಗ ನಾವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ದಿಂದಲೂ (ವಿಜಯ) ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ದಿಂದಲೂ (ಸೋಲು) ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸೋಣ.

ಈಗ $P(H) = P = \frac{1}{2}$

$P(T) = q = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $P + q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಅದರಿಂದ ಬರುವ ಪ್ರತಿಫಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಬಹುದು.

ವಿಜಯಗಳ ಗಣ = (HH, HT, TH, TT)

ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಯಾವುವೆಂದರೆ pp. pq, qp, qq

ಅಂದರೆ $p^2, 2pq, q^2$

ಈ ಮೇಲಿನವು $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ ದ ಪದಗಳಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ p ಎಂದರೆ Head q ಎಂದರೆ Tail.

ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿಷಯಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ. $p^3, p^2q, p^2q, pq^2, q^2p, pq^2, q^3$

ಇವು $(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

ಇಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು n–ಸಾರಿ ಅದೇ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ನೆರವೇರಿಸಿದಾಗ r ವಿಜಯಗಳು ಬರಬಹುದಾದ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ r-ವಿಜಯಗಳು ದೊರೆಯಬಹುದುದಾದ ಸಂಭವನೀಯ ಫಲ (function-Probality) ಈ ರೀತಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಔದ್ಯೋಗಿಕ ಫ್ಯಾಕ್ಟರಿಯಲ್ಲಿ ಶೇಕಡಾ 20 ರಷ್ಟು ಜನ. ಔದ್ಯೋಗಿಕ ರೋಗದಿಂದ ನರಳುತ್ತಿದ್ದರು. 6 ಕೆಲಸಗಾರರಲ್ಲಿ 4 ಕೆಲಸಗಾರರ ಔದ್ಯೋಗಿಕ ರೋಗದಿಂದ ನರಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ರೀತಿ : ರೋಗದಿಂದ ನರಳುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{20}{100} = 0.2$

$\therefore p + q = 1.\ q = 1 - p$

$= 1 - 0.2 = 0.8$

$n = 6, r = 4, p = 0.2$ ಮತ್ತು $q = 0.8$

(1) .... $\boxed{P(r) = {}^nC_r q^{n-r} p^r}$

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ $\boxed{p(r) = {}^6C_4 q^{5-4} p^r}$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$p(r = 4) = {}^6C_4 (0.8)^{6-4} (0.2)^4$

$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.8 \times 0.8$

$= 15 \times 0.0016 \times 0.64 = 0.015.36$

$nC_r = \frac{n!}{(n-1!)r!}$

$6C_4 = \frac{6!}{(6-4!)\,4!}$

$6C_4 = \frac{6!}{(2!)\,4!}$

$6C_4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

Random Variables ನ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು E(X) ದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಸತತ ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ E(X) ನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಮಾಪನ ಮಾಡಬಹುದು. ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ X ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿವರಣೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

X	Px(x)
Â	Â
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ X ನ ಮೌಲ್ಯವು ಎರಡು ಡೈಸ್(dice) ರೋಲ್‌ಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$= 2(1/36) + 3(2/36) + 4(3/36) + 6(5/36) + 7(6/36) + 8(5/36)$$

$$+ 9(4/36) + 10(3/36) + 11(2/36) + 12(1/36)$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{30} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

ದೀರ್ಘಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಡೈಸ್‌ರೋಲ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮೌಲ್ಯ 7 ಆಗಿದೆ.

4. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕಗಳ ಕಾರ್ಯಗಳು (Functions of Random Variables)

ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕ ಎನ್ನುವುದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ವಿವರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕಾರ್ಯಗಳು ಇಂತಿವೆ.

1. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯೇಬಲ್‌ಗಳು ಮೇಲಿಂದ ಮೇಲೆ ಇಕೊನೊ. ಮೆಟ್ರಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ (Econometric) ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು regression ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
2. ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ರ್‍ಯಾಂಡಮ ಚಲಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಅನೇಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಅಗತ್ಯವಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
3. ಸಾಂಸ್ಥಿಕ (Corporate) ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿನ ಆಸ್ತಿಯ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ, ನಿಗದಿತ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಹೂಡಿಕೆಯ ಲಾಭ, ಮುಂದಿನ ಆರು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಪನಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ವಹಿವಾಟು ದರ ಮುಂತಾದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತಾರೆ.
4. ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಯಸಿದಾಗ ಇದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.
5. ಇದು ಅಪಾಯವನ್ನು (risk) ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ಧಾರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕರು ಇದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.
6. ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ್ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದು ಯಾವುದೇ ಸಂಭವನೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಂಭವಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
7. ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ್‌ಗಳು ಅಸತತ ಅಥವಾ ಸತತ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

5. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸತತ ಮತ್ತು ಅಸತತ ವಿತರಣೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳ (Properties of commonly used discrete and continous distribution):

ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

1. ವೀಕ್ಷಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳು (Experiment)
2. ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳು (Theoritical)

ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆ (Mathematical expectation)

X ಅಸತತ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕದ ಜೊತೆಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಕ್ರಿಯೆ $P(x)$ ಆಗ ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆ X ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n$ ಇದ್ದಾಗ ಸಂಭವನಿಯತೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆ X ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ E(X) ದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$E(X) = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + \ldots + x_nP_n$$

$$E(X) = \sum x.\ P(x)$$

X ನ h (X) ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಕ್ರಿಯೆ (h (X) of X)

X ಅಸತತ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕದ ಜೊತೆಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಕ್ರಿಯೆ $P(x)$ ಆಗ X ನ h (x) ಯಾವುದೇ ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಕಾರ್ಯವು.

$$E[h(X)] = \sum h\ (x).\ P(x)$$

ಪ್ರಯೋಗ : ಎರಡೂ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಟಾಸ್ (toss) ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಮುಖ (head) ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : X ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲ್ಮುಖ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಆಗ X ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕವಾಗಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯ 0, 1 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿ ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

x	0	1	2
Px	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲ್ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಣಿತದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯು

$$\Sigma(X) = \Sigma x.P(x) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

$$= \frac{2+2}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

i. X ನ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ (mean) E (X).

ii. X ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಚಲಕದ. ಬದಲಾವಣೆ (Variance)

$$Var\ (X) = E\ [X - E]^2$$

$$= E(X)^2 - \{E\ (X)\}^2$$

Standard deviation (σ) is the squre root of variance.

ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯ ಉದಾಹರಣೆ :

ಎರಡು ಪ್ರಾಮಾಣಿತ ಆರು ಬದಿಯ ಡೈ (dice) ಯನ್ನು ಉರುಳಿಸುವಾಗ ಗಮನಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಡೈ ಒಂದರಿಂದ ಆರರವರೆಗೆ (1–6) ಉರುಳಿಸುವ 1/6 ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎರಡು ಡೈಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಏಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿದೆ.

$1 \div 6,\ 6 \div 1, 5 \div 2,\ 2 \div 5,\ 3 \div 4,\ 4 \div 3,$

ಎರಡು (1+1) ಮತ್ತು ಹನ್ನೆರಡು (6+6) ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ.

3. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯ (Expected Values of Random Variables)

ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೇರಿಯೇಬಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ(mean)ಗೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯವು ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ತಯಾರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯ (values)ಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಮೌಲ್ಯಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಸರಾಸರಿ ಕೆಲವು ಸೀಮಿತ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ವೇರಿಯೇಬಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಅದು ಅನಂತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ). ಈ ಸೀಮಿತ ಮೌಲ್ಯವು Random Variables ನ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಚಲಕವು ಕೇವಲ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. 24 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಇದು ಅಪೂರ್ಣ (ಭಿನ್ನರಾಶಿ) ಸಂಖ್ಯೆ 24/2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೌಲ್ಯದ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಅಸತತ ಚಲಕವು ಅಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ದ್ರವ್ಯತೆ ಕಾರ್ಯಗಳು (Probability mass functions)

X ಎಂಬುದು ಅಸತತ (discrete) ಯಾದೃಚ್ಛಿ ಚಲಕವಾಗಿದೆ ಆಗ $P(x)$ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

$$P(x) = P\ [X = x]$$

ಆಗ $P(x)$ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು x ನ. mass functions (ದ್ರವ್ಯತೆ ಕಾರ್ಯ) ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ (i) $P(x) \geq 0$ ಎಲ್ಲಾ x ಗಳಿಗೆ

(ii) $\sum P(x) = 1$

ಇದೇ ರೀತಿ ಸತತ (Continuous) ಯಾದೃಚ್ಛಿ ಚಲಕ X ಕಾರ್ಯ (function) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ (ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆ ಕಾರ್ಯ) Probability Density functions ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು $f(x)$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಗುರುತಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯ (Probability Density function)

X ಒಂದು ನಿರಂತರ (ಸತತ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೌಲ್ಯ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸತತ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ X ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಕಾರ್ಯ $f(x)$ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಬೇಕು.

i. $f(x) \geq 0$ ಮಧ್ಯಂತರದಲ್ಲಿನ (a, b) ಎಲ್ಲಾ x ಗಳಿಗೆ.

ii. c ಮತ್ತು d ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ (a, b) ಮಧ್ಯಂತರದಲ್ಲಿ.

$P(C \leq X \leq d)$ = Area under the probability curve between ordinates at $X = C$ and $X = d$.

iii. ರೇಖೆಯ ಒಳಗಿನ ಕ್ಷೇತ್ರ 1 ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $P(-\infty < X < \infty) = 1$.

2. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿತರಣೆ (Probability Distribution)

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯನ್ನು, ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಕಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯು ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವನೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಭವನೀಯ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಯೋಜಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯುರುವಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಹಲವಾರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವಲಂಭಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂಶಗಳು ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ, ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಚಲನೆ (Standard deviation), ಓರೆ (Skewriess) ಮತ್ತು ಕುರ್ಟೋಸಿಸ್ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿತರಣೆ (Probability Distribution)

ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯು ಆವರ್ತನ ವಿತರಣೆಗೆ (frequency Distribution) ಹೋಲುತ್ತದೆ. ಆವರ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಚಲಕಗಳ ವಿಭಿನ್ನ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ಒಟ್ಟು ಆವರ್ತನವನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿತರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿವರಣೆಯು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳ ವಿವಿಧ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ಒಟ್ಟು ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿತರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂತಹ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಮೌಲ್ಯಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯನ್ನು ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯೇಬಲ X ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯು ಇಂತಿದೆ.

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(x)$	P_1	P_2	P_3	P_n	

ಇಲ್ಲಿ $\Sigma P(x) = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = 1$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹಾರಿಸಿದಾಗ, ಆಗ ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ಇಲ್ಲಿ X ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲ್ಮುಖ (H) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಲಕಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಬಹುದಾದ ಅಗತ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಮೂರು ಡೈ (dice) ಗಳನ್ನು ಸುತ್ತಿಕೊಂಡ (roll) ನಂತರ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು X ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಇಲ್ಲಿ X, 3(1+1+1) ಅಥವಾ 18 (6+6+6) ಅಥವಾ 3 ಮತ್ತು 18 ಮಧ್ಯ ಎಲ್ಲಾದರೂ ಇರಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಡೈಸ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಹಾರಿಸಿದಾಗ ಅದು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಯಾಂಪಲ್ ಸ್ಪೈಸ್ S ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

S = {TT, HT, TH, HH}

ಅಂದರೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಕೆಳಮುಖ (Tail) ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖ (Head) ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖ (H-T), ಒಂದು ಕೆಳಮುಖ ಮತ್ತೊಂದು ಮೇಲ್ಮುಖ, ಎರಡೂ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿದೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

Sample po int	TT	TH	HT	HH
ಸಂಖ್ಯೆ (H)	0	1	1	2

ಮೇಲ್ಮುಖ (H) ಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಮುಖ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ X ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ ಹೀಗಾಗಿ X sample space ನ ಕಾಯಕವಾಗಿದೆ. X is a function of sample space.

ಇದರ ಮೌಲ್ಯವು 0,1 ಮತ್ತು 2 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$

P [X = 0] = P [ಮೇಲ್ಮುಖಗಳಿಲ್ಲ] = $\frac{1}{4}$

P [X = 1] = P [ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖ] = $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

P [X = 2] = P [ಎರಡು ಮೇಲ್ಮುಖ] = $\frac{1}{4}$

ಇಲ್ಲಿ X ನ್ನು ರ್‍ಯಾಂಡಮ ವೆರಿಯೆಬಲ (ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿನ ಮಾದರಿ ಬಿಂದುವಿಗೆ ನೈಜ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನೀಡುವುದಕ್ಕೆ Random varaible ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವು ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಚಲಕಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಚಲಕವು ಅಜ್ಞಾನ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಉದಾ : $10 + x = 13$

$x = 13 - 10$

$= 3$

ಇಲ್ಲಿ x ನ ಮೌಲ್ಯ 3 ಎಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವು ಮೌಲ್ಯಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಡೈನ ಉದಾಹರಣೆ ನೀಡಿ ಡೈಯನ್ನು ಸುತ್ತ ಹಾಕಿದಾಗ ಒಮ್ಮೆ 2, ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ 1 ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ 4 ಬಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ 7 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದು ಬದಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವು 3 ರಿಂದ 18 ರ ಒಳಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಚಲಕಗಳ ದೀರ್ಘ ಮಾನದಂಡದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಚಲಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

i. ಸತತ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ (Continuous randam variable)

ii. ಅಸತತ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕ (Discrete randam variable)

i. ಸತತ ಚಲಕವು ಯಾವುದೇ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಎತ್ತರವು 90 ಸೆಂ ಮೀ. ದಿಂದ 150 ಸೆಂ.ಮೀ ಗೆ ಬೆಳೆದಾಗ ಅದರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅದು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದರೆ ದೂರ. ಕಲಬುರಗಿಯಿಂದ ಬೀದರ (0 ದಿಂದ 110) 110 ಕಿ.ಮೀ ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಊಹೆಮಾಡಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು (ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಇತ್ಯಾದಿ) ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರ x ದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ

ii. ಅಸತತ ಚಲಕ ಕೆಲವು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೌಲ್ಯವು ಪರಿಮಿತ ಜಿಗಿತದಿಂದ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಜಿಗಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ

ಎರಡು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಮೊದಲನೆ ಡ್ರಾದಲ್ಲಿ ರಾಜ (king) ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಡ್ರಾದಲ್ಲಿ ರಾಜ (king) ಬರುವ ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದ್ದಾಗ

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಮಾದರಿ ಪ್ರದೇಶ (space) S ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳ ಒಂದು ಕೆಳಬಂದ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು A ಅಥವಾ B ಬಾರದಿದ್ದರೆ A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳನ್ನುವರು.

i. $P(A|B) = P(A)$

ii. $P(B|A) = P(B)$

iii. $P(AB) = P(A).P(B)$

ಉದಾ: ಒಂದು ಎರಡು (2) ರೂ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹಾಗೂ ಒಂದು (1) ರೂ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ 2 ರೂ. ನಾಣ್ಯ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳಲು 1 ರೂ. ನಾಣ್ಯ ಯಾವುದೇ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುವುದಿಲ್ಲ. 1 ರೂ. ನಾಣ್ಯವೂ ಕೂಡ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಅವಲಂಬಿತ ಘಟನೆಗಳು (Dependent Events)

ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಅವಲಂಬಿತ ಘಟನೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಘಟನೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರಭಾವಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : ಕಳ್ಳತನ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷೆ.

- ವಿದ್ಯುತ್ತಿನ ದೀಪ ಹಾಕಿಸಿದ್ದರೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಸರಬರಾಜು ಕಡಿತ
- ಕಾರು ಚಾಲನೆ ಮತ್ತು ಅಪಘಾತ.

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ ಎಂದರೇನು? ವಿವರಿಸಿ.
2. ಘಟನೆ ಎಂದರೇನು? ಅದರ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
3. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

****

3. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆ ವಿವರಣೆ

(Randam Variables and Probability Distribution)

1. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Definition of Randam variables)
2. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವಿವರಣೆ (Probability Distribution)
3. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳು
   (Expected values of Randam variables)
4. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕಗಳ ಕಾರ್ಯಗಳು
   (Functions of Randam variables)
5. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಅನಿರತ ಮತ್ತು ನಿರತ ವಿತರಣೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು (ಏಕರೂಪದ, ದ್ವಿಪದ, ಸಾಮಾನ್ಯ, ಪೊಯಿಸನ್ ಮತ್ತು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕದ ಘಾತ).
   (Properties of commonly used discrete and continuous distribution (uniform, bio nominal, rural, poison and exponential randam variables)

1. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ (ಅನಿಶ್ಚಿತ) ಚಲಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Defining of Randam variables)

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಲಕವೆಂದರೆ ಅದು ಒಂದು ಚಲಕ ಅದರ ಮೌಲ್ಯ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿದ್ದು ಅಥವಾ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಪರಿಣಾಮಗಳಿಗೆ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿಗದಿಪಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯಬಲ್‌ಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ (ಅನಿರತ) ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯಬಲ್ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಅಂಕಿಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯಬಲ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದಾಗಿ ಅನೇಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ

ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರಮೇಯ (Multiplication theorem)

ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P(A) ಮತ್ತು P(B) ಇದ್ದರೆ ಈ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಒಮ್ಮೆಲ್ಲೇ ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎರಡು ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕ ಒಂದು ವೇಳೆ A ಮತ್ತು B ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

P (A ಮತ್ತು B)

= P (A) × P (B)

ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ

P (A, B ಮತ್ತು C)

= P (A) × P (B) × P (C)

4. ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ (Conditional probability)

ಗುಣಾಂಕದ ಪ್ರಮೇಯ ಅವಲಂಬಿತ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ (dependent events) ಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. A ಮತ್ತು B ಮತ್ತು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದು ಒಂದು ಘಟನೆ A_1 ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುತ್ತದೆ. B ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದರೆ A ಘಟನೆ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಅವಲಂಬಿತ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳಿಗೆ ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು P (A/B) ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಘಟನೆ ಈಗಾಗಲೇ ಸಂಭವಿಸಿದೆ ಎಂಬ ಷರತ್ತಿನಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಅವಲಂಬಿತ ಘಟಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ A ನೀಡಿದ (given) B ಯ ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ರಹಿತ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(B) ಆಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $A>0$, ಆಗ ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ (A ನೀಡಿದ B ಯ ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ).

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

5. ಬೇಸ್ ನಿಯಮ (Bayes Rules) (1702-61)

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ರೆವರೆಂಡ್ ಥಾಮಸ್ ಬೇಸ್ (Reverend Thomas Bayes) ಅವರು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಬೇಸ್ ನಿಯಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಬೇಸ್ ನಿಯಮವು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಬೇಸ್ ನಿಯಮ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಬೇಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಬೇಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ ಬೇಸಿಯನ್ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹೊಸ ಡೇಟಾವನ್ನು ಪಡೆದ ನಂತರ ನಂಬಿಕೆಗಳ ಮಟ್ಟವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ನವೀಕರಿಸಲು ಬೇಸಿಯನ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಘಟನೆ A ಮತ್ತು B ನೀಡಿದಾಗ ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$P(A/B)=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

ಇಲ್ಲಿ $P(B) \neq O$

A ಪ್ರತಿಪಾದನೆ (Proposition) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

B ಪುರಾವೆಗಳನ್ನು (evidence) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

P (A|B) – ಪೂರ್ವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

P (B|A) – ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಾರ್ಯ (likelihood function).

6. ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳು (Independent Events)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಟನೆಗಳಿದ್ದಾಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಉಳಿದ ಯಾವ ಘಟನೆಗೂ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವ ಅಥವಾ ಸಂಭವಿಸದಿರುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಘಟಕದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರದಿದ್ದರೆ ಆ ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳೆರಡು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 52 ಪ್ಲೇಯಿಂಗ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಪ್ಯಾಕ್‌ನಿಂದ ಒಂದರ ನಂತರ ಒಂದರಂತೆ

ಮತ್ತು 5. ಅವುಗಳು ಖಾಲಿ ಛೇದಕವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ನಾವು ಸಂಯೋಜನೆ (Union) ಎಂದು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕವಿಲ್ಲದಷ್ಟು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಎಣಿಕೆಯ ತಂತ್ರಗಳು (Counting Techniques)

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ:

1. ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ (Addition theorem): ಒಟ್ಟು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ) ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಘಟನೆ. P (A) ಮತ್ತು P (B) ಇದ್ದಾಗ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

i. $P(A \cup B) = P(A) + A(B) - PB$

ii. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

iii. $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

ಒಂದು ವೇಳೆ A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಘಟನೆಗಳಿದ್ದಾಗ

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - (P \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ (ಪರಸ್ಪರ ವಿಶೇಷ ಘಟನೆಗಳಿಗಾಗಿ) (For matually exclusive events)

A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ವಿಶೇಷ ಘಟನೆಗಳಿದ್ದಾಗ ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು P (A) ಮತ್ತು P (B) ಆಗ ಈ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ಇದನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಘಟನೆ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_k$, ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಘಟನೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಕಲನದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಆ ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಂಕಲನೆಕ್ಕೆ ಸಮ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ.

$P(A_1 \cup B_2\ A_3 \ldots\ldots\ldots A_k)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots + P(A_k)$

ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವಿಧಾನ (Classical approach)

ಗಣಿತದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (Mathematical definition)

ರ್‍ಯಾಂಡಂ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶವು n ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ (exclusive) ಮತ್ತು ನಿಷ್ಕಾಸ (exhanstive) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳು ಘಟಕದ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು m ಆಗ A ದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

$$P(A) = \frac{\text{ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (m)}}{\text{ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n)}} = \frac{m}{n}$$

ಫಲಿತಾಂಶ – 1

P (A) ದ ಮೌಲ್ಯವು O ಮತ್ತು 1 ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ m ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ O ಮತ್ತು m ನ ಗರಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯ n ಆದ್ದರಿಂದ

$o \le m \le n$

$\frac{o}{n} \le \frac{m}{n} \le \frac{n}{n}$

$\Rightarrow O \le P(A) \le 1$

ಹೀಗಾಗಿ P (A) ದ ಮೌಲ್ಯವು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ – 2

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A) = 1 - P(A')$

ಉದಾ

ಘಟನೆ A ಮತ್ತು B ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P (A) ಮತ್ತು P (B) ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ

$P(AB) = P(A)\ P(B)$

ರೀತಿ : ಕೊಟ್ಟ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಗುಂಡನ್ನು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಸಮ ಸಂಭವ ವಿಧಗಳು 35 ಇವೆ. ಈ 35 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ.

ಬಿಳಿ 5 ಗುಂಡು, ಕರಿ ಗುಂಡು 10, ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕೆಂಪು ಗುಂಡು 20 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬರಲಿಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯ.

$$\therefore \text{A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ } = P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{7}$$

$$\text{B ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ } = P(B) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

$$\text{C ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ } = P(C) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದರ (0 ದಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ) ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 9 ಬಿಳಿ ಹಾಗೂ 11(ಹನ್ನೊಂದು) ಕರಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಹೊರ ತೆರೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದ ಪರಿಣಾಮಗಳು = 20 ಚೆಂಡುಗಳು

9 ಬಿಳಿ + 11 ಕರಿ ಚೆಂಡುಗಳು

ಬಲವತ್ತ ಪರಿಣಾಮಗಳು = 9 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{9}{20}$.

(2) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Statistical method): ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 'n' ಬಾರಿ (times) ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಯ ತಲೆ (Head) ಯ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಇದರ ಅನುಪಾತವು m/n. m/n ಮೌಲ್ಯವು ಸಂಭವನೀಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುವ ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಅಥವಾ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವಿಧಾನ (empirical method) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು n ವರೆಗೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವಾ. ಇದರಿಂದ m ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. y ರ A ಘಟಕದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು m/n. ಆದರೆ

$$P(A) = \lim \frac{m}{n}$$

ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ನಿಯಮಗಳಿವೆ. ಈ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳು (Probability axioms) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

Axiorns - I (ಮೂಲತತ್ವಗಳು)

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೊದಲ ಮೂಲತತ್ವವೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕ ರಹಿತ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರರ್ಥ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೂ ಎಷ್ಟೇ ಚಿಕ್ಕದಿದ್ದರು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅನಂತವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ನಾವು ಬಳಸುವ ಗಣ (set) ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ತರ್ಕಬದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಂದು ಬರೆಯಲಾದ ಅ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಒಂದು ವಿಷಯವೇನೆಂದರೆ, ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನೂ ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲ. ಮೂಲತತ್ವವು ನಕರಾತ್ಮಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕುತ್ತದೆ. ಅಸಾಧ್ಯ ಘಟನೆ (event) ಗಳಿಗೆ ಕಾಯ್ದಿರಿಸಲಾದ ಸಣ್ಣ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಶೂನ್ಯ ಎಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಇದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

Axiorns - II (ಮೂಲತತ್ವ - II)

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂಲತತ್ವವೆಂದರೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (Sample space) ದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ P(S)=1 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೂಲತತ್ವದಲ್ಲಿ ಸೂಚ್ಯಂಕವೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಪ್ರತೀತ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳದ ಹೊರಗೆ ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಗಳು ಇಲ್ಲ.

ಈ ಮೂಲತತ್ವವು ಸಂಪೂರ್ಣ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವಲ್ಲದ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಸಂಪೂರ್ಣ ಶೇ. 100 ರಷ್ಟು ನಿಶ್ಚಿತತೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

Axiorns - III (ಮೂಲತತ್ವ - III)

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂರನೇಯ ತತ್ವವು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟಕಗಳೊಂದಿಗೆ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ E_1 ಮತ್ತು E_1 ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ A ದ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(A) ಆಗಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲತತ್ವಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

Axiom (i) = $P(A) \geq 0$ (ನಕರಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿತಿ)

Axiom (ii) : $P(S) = 1$ (S ಖಚಿತ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ)

Axiom (iii) : If $A \cap B = \phi$ ಆಗ $(P \cup B) = P(A) + P(B)$

(ಗಮನಿಸಿ: ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಸ್ಪರ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಮೂರನೆಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (Results):

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

1. $P(\phi) = 0$: ಇಲ್ಲಿ ϕ ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. $P(S) = 1$: ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಒಂದು (1) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
3. $0 \leq P(A) \leq 1$: P(A) ದ ಮೌಲ್ಯವು 0 ಮತ್ತು 1 ಮಧ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ. (ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮಿತಿ 0 ಮತ್ತು 1).
4. $P(A) + P(A^{1}) = 1$: ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಮೊತ್ತ 1 (ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ).

ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನವಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸುವುದು. "ನಿಶ್ಚಿತ"ವೆಂದಾಗಲೀ ಅವಶ್ಯವೆಂದಾಗಲೀ ಹೇಳಲು ಬರದಿದ್ದರೆ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಮೊರೆ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಒಂದು ಉಪಗ್ರಹವು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಗುರಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟಿದ್ದು, ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲಿಕ್ಕಾಗದಿದ್ದರೂ, ಆ ಉಪಗ್ರಹವು ಗುರಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ? ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೆದುರಿಸಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆ ಈ ಶಬ್ದವನ್ನು ನಾವು ದಿನನಿತ್ಯ ಮಾತನಾಡುವಾಗಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶಬ್ದ ನಮಗೆ ಹೊಸದಲ್ಲ.

ಈ ವರ್ಷ ಜಾಗತಿಕ ಕ್ರಿಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾರತ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇದೆ. ಈ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೆ.ಎಲ್. ರಾಹುಲ್ ಶತಕ ಬಾರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇದೆ. ನಾಳೆ ಮಳೆ

ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇದೆ. ಅವನು ಎಂ.ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆ ಪಾಸಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇಲ್ಲ ಮುಂತಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಲ ನಾವೂ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡುವುದು ಉಂಟು. ಹೀಗೆ ಹೇಳುವರು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯ ನಂಬಿಕೆಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಲ್ಲಿಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಹೇಗೆ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಉತ್ತರವನ್ನೇ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

(1) ಗಣಿತೀಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಕ ವಿಧಾನ

(2) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(1) ಗಣಿತೀಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Mathematical Definition of Probability):

"ಒಟ್ಟು (n) ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಹಾಗೂ ಸಮಾನಶಕ್ತ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ A ಘಟನೆಯು m ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಘಟಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ A ಘಟನೆಯ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ n/m ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$$P(A) = \frac{\text{A ದ ಘಟಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಘಟನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಜೇಮ್ಸ್ ಬರ್ನೋಲಿಯವರು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಅದು ಚಿತ್ತ (Head) ಇಲ್ಲವೇ ಪಟ್ಟ (tail) ಆಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವವಿದೆ ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಶೇ 50 ಅಥವಾ 1/2. ಆರು ಮಾಟದ ಒಂದು ಡೈ (die)ಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ 1,2,3,4,5,6 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ ಅಂದರೆ ಸಂಭವನಿಯತೆ 1/6. ಈ ರೀತಿ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನಿಯತೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಕ ಅಥವಾ ಗಣಿತದ ರದ್ಧತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

1. 5 ಬಿಳಿಯ 10 ಕಪ್ಪು ಹಾಗೂ 20 ಕೆಂಪು ಗುಂಡುಗಳು ಇರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಗುಂಡನ್ನು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ A = ತೆಗೆದ ಗುಂಡು ಬಿಳಿಯದು. B = ತೆಗೆದ ಗುಂಡು ಕಪ್ಪು. C = ತೆಗೆದ ಗುಂಡ ಕೆಂಪು. ಈ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳೇನು?

ಅಂದರೆ ಯಾವುದೊಂದು ಗಣದ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಗಣವನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಗಣದ ಉಪಗಣ (Subset) ಎನ್ನುವರು. ಉಪಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು C ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

A = {1, 2, 3, 4, 6}

B = {2}

ಮತ್ತು BCA.

5. ಪೂರಕ ಘಟನೆ (Compliment of an event) "ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಲಾರದ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಘಟನೆಗಳ ಘಟನೆಗೆ "ಪೂರಕ ಘಟನೆ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ ಸಮೇತ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : 'S' ಇದು ಘಟನೆಯ ಒಟ್ಟು ಪರಿಣಾಮಗಳಾಗಿರಲಿ X ಇದು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ X ಇದು Y ದ ಪೂರಕ ಘಟಕವಾಗಿರಲಿ.

S = {1, 2, 3, 4, 5}

X = {2, 4}

X' = {1, 3, 5}

6. ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಘಟನೆಗಳು (Mutually exclusive event) ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಒಂದು ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಯಾವ ಘಟನೆಯೂ ಸಂಭವಿಸದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಬಹಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಅಥವಾ ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಘಟನೆಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ತೂರುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ಅದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಮುಖ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಲಾರದು. ಇಂತಹ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಘಟನೆಗಳೆನ್ನುವರು.

A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ.

$A \cap B = \Phi$ (Φ = ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆ)

ಇದಕ್ಕೆ ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಘಟನೆ ಎಂತಲೂ ಕರೆಯಬಹುದು.

P = {1, 2, 3} Q = [P, Q]

$P \cap Q = \{\Phi\}$

P ಮತ್ತು Q ಘಟನೆಗಳು, ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಘಟನೆಗಳು. ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆರಡೂ ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾರವು.

7. ಸಮಶಕ್ಯತೆ ಘಟನೆಗಳು (Equally likely Events) "ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳು (ಘಟನೆಗಳು) ಸಂಭವಿಸುವ ಶಕ್ಯತೆ ಅಷ್ಟೇ ಇದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಮಶಕ್ಯತೆ ಪರಿಣಾಮಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾ: ಒಂದು ಮಗು ಜನ್ಮ ತಾಳುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಹೆಣ್ಣು ಆಗುವ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿಯಾದರೂ ಬೀಳಬಹುದು, ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿಯಾದರೂ ಬೀಳಬಹುದು. ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶ ಅಷ್ಟೇ ಇದೆ.

8. ನಿಷ್ಕಾಸ ಘಟನೆಗಳು (Exhaustive Events) "ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಅಥವಾ ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದಲ್ಲಿ ಘಟನೆಯು ನಿಷ್ಕಾಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಘಟನೆಗಳ ಸಮೂಹವು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಖಾಲಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: ಡೈಯನ್ನು ಎಸೆಯುವಾಗ ಆರು (6) ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ನಿಷ್ಕಾಸವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಉಳಿದಿದ್ದರೆ, ಉಳಿದ ಐದು (5) ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ನಿಷ್ಕಾಸವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಡೈಸ ಘಟನೆಗಳು

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6} ಮತ್ತು

C = {1, 5, 6}

ಇವೆಲ್ಲವು ನಿಷ್ಕಾಸ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೂಲತತ್ವಗಳು ಮತ್ತು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Probability, Axioms and Properties)

A ಮತ್ತು B ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (sample space) ದ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ನಿಯೋಜಿಸಲಾದ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು)

A = {HH, HT, TH} ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಹೇಳುವ ಘಟನೆ.

B = {HT, TT) ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗ.

$A \cup B$ = {HH, HT, TH, TH}

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗವು A ಘಟನೆಯ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು B ಘಟನೆಯ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಪುನರಾವೃತ್ತಿಯಾಗದಂತೆ ಇರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ : 3

S = {HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH, HTH, THT}

A = {HHH, HHT, THH}

B = {HHH, TTT}

$\therefore$ $A \cup B$ = {HHH, HHT, THH, TTT}

$A \cup B$

3. ಘಟನೆಗಳ ಛೇದನ (Intersection of event) ಎರಡು ಘಟನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಘಟನೆಗೆ ಘಟನೆಗಳ ಛೇದನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಒಮ್ಮೆಲೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ತೂರಿದಾಗ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ.

A = {HH, HT, TH} ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಕೆಳಮುಖ ಬರುವ ಘಟನೆ

B = {HT, TH, TT}ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $A \cap B$ ಯು A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

$A \cap B$ = {HT, TH}

ಚಿತ್ರ ಸಹಿತವಾಗಿಯೂ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$A \cap B$

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದೊಡಗೂಡಿದ ವ್ಯೋಮವು $A \cap P$ = A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : 2

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

C = {4, 5, 6}

$A \cap B \cap C$ = {6}

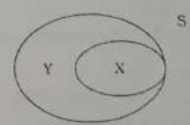
4. ಉಪಘಟನೆ (Sub event) 'X' ಮತ್ತು 'Y' ಎರಡು ಘಟನಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ Xನ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಣಾಮಗಳ Yದ ಪರಿಣಾಮಗಳಾಗಿದ್ದರೆ X ಘಟನೆಯು Y ಘಟನೆಯ ಉಪಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಇದನ್ನೇ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ XCY: Yದ ಉಪಘಟನೆ X ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ತೂರಿದಾಗ, ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖ ಬರುವ ಘಟನೆ 3 ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ HH, HT, TH ಈ ಘಟನೆಗೆ Y ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಇದೆ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖ, ಒಂದು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ ಎರಡು ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ HT, TH. ಈ ಘಟನೆಗಳನ್ನು X ಎಂದ ಕರೆಯುವ. ಇಲ್ಲಿ Xದ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳು 'Y' ದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ XCYಇದನ್ನೇ ಈ ರೀತಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

Y = {HH, HT, TH}

X = {HT, TH}



(toss) ಮಾಡಿ. ಆಗ ಟಾಸ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಮಾದ… ಸ್ಥಳವು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

S = {1, 2, 3, 4, ...}

ಇದು ಅನಂತ (infinite) ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವಾಗಿದೆ.

ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (Sample Space):

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ದೇಹದ ಉಷ್ಣತೆ 98°F ದಿಂದ 104°F ಗಳವರೆಗೆ ಇ… ಇಲಲಿ ಮಧ್ಯಂತರ ಬಿಂದುಗಳ (interval points) ನ್ನು ಮಾಪನ ಮಾಡುವ…

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಡೈಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಸ… ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾದರಿಸ್ಥಳ (Sample Spa… ಇಂತಿರುತ್ತದೆ.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4, 2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

ಘಟನೆಗಳು (Events) : ಈವೆಂಟ್ ಎನ್ನುವುದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋ… ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು. ಇದು ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (sample space)ದ ಉಪ… (subset)ವಾಗಿದೆ. ಘಟನೆಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡಕ್ಷರ A, B, C ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಕೇತಗಳ… ಗುರುತಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

ಯಾವ ಘಟನೆಯು ಯಾವುದೇ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ ಅ… ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆ (null event) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು Φ ಸಂಕೇತದಿಂ… ಗುರುತಿಸುತ್ತಾರೆ ಯಾವ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವಿರುತ್ತದೆಯೋ…

ಡೈ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ (1, 2, 3, 4, 5, 6) ಬರುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಘಟಕ್ಕೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೆವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಟನೆಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ ಯಾವ ಘಟಕವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅದಕ್ಕೆ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ (sure (certain) event) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 6 ಸಾರಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ 4 ಸಾರಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಮತ್ತು 2 ಸಾರಿ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿಯೂ ಬೀಳಬಹುದು. ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಘಟನೆ (event) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 3 ಸಾರಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಪ್ರತಿ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖ ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ ನಿದರ್ಶಕ ವ್ಯೋಮ ವು 8 ನಿದರ್ಶಕ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

S = {HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH, HTH, THT}

1. ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆ (Null event) : ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನೇ ಹೊಂದಿರದ ಘಟನೆಗೆ ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು Φ ದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಉದಾ: ಡೈ ಹಾಕಿದಾಗ 7 ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಹೀಗಾಗಿ 'C = { Φ }' ಇದನ್ನು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ, ತೂರಿದಾಗ 2 ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಘಟನೆ ಶೂನ್ಯ ಹಾಗೂ ಇದು ಶೂನ್ಯ ಗಣವಿದ್ದಂತೆ.

ಶೂನ್ಯ ಘಟನೆಯು ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಯ ಉಪಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

2. ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗ (Union of event) ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನಗಳಲ್ಲಿಯ ಪರಿಣಾಮಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಘಟನೆಗೆ "ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗ" ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು 'U' ಸಂಕೇತದಿಂದ ಗುರುತಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಡೈಯನ್ನು ಎಸೆದಾಗ A = {2, 4, 6}, B = {3,6} ಮತ್ತು C = {4,5,6} ಮೂರು ಘಟನೆಗಳಿವೆ. ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗವು AUBUC = {2,3,4,5,6} ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಒಮ್ಮೆಲೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ತೂರುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ನಿದರ್ಶಕ ವ್ಯೋಮವು HH, HT, TH, TT, TH ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ.

(De. Moivre) ಪಾಸ್ಕಲ್‌ನ ಫರ್ಮಟ್, (Pascal father) ಲ್ಯಾಪ್ಲೆಸ್ (Laplace) ಆರ್.ಉ. ಫಿಶರ್ ಕಾರ್ಡನ್ (R.W. Fisher) ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ತಜ್ಞರಿದ್ದಾರೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು (Definitions):

Probability is the numerical measures which indicates chance of accurance.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದು ಅದು ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

1. ಆಕಸ್ಮಿಕ ಪ್ರಯೋಗ : (ಎ) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತದೆಯೋ ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತದೆಯೋ ಎಂದು ಹೇಳಲಿಕ್ಕಾಗದು. (ಬಿ) ಅದೇ ರೀತಿ ಮಗು ಹುಟ್ಟುವ ಮೊದಲೇ ಗಂಡೋ, ಹೆಣ್ಣೋ, ಎಂದು ನುಡಿಯಲಿಕ್ಕಾಗದು. ಹೀಗೆ "ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳಲಾಗದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಆಕಸ್ಮಿಕ ಪ್ರಯೋಗ ಎನ್ನುವರು.

2. ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಪ್ರಮಾಣ (ಸಂಭವನೀಯ ಟ್ರೈಯಲ್ (Trial) : ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ.

i. ಒಂದೇ ಸ್ಥಿತಿಯ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಆ ಪ್ರಯೋಗದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಪ್ರಯತ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ನಿರ್ಣಾಯಕ ಪ್ರಯೋಗ (Deterministic Experiment) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ರೋಗಿಯ ದೇಹದ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪರಿಶಿಲಿಸುವುದು.

ii ರ್‍ಯಾಂಡವ್ ಪ್ರಯೋಗ (Random Experiment) : ರ್‍ಯಾಂಡವ್ ಪ್ರಯೋಗವು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದ್ದು, ಅದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಅದೇ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಒಂದು ಅನನ್ಯ (not unique) ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

a. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ (toss of a coin) ಅದು ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಟಾಸ್ (toss) ಮಾಡಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ (head) ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ (tail) ಬೀಳಬಹುದು.

b. ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛವಾಗಿ (randomly) ಒಂದು ಎಲೆ (card) ತೆಗೆದಾಗ ಅದು ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದೆ. 52 ಎಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎಲೆ ತೆಗೆಯುವುದು.

ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (ನಿದರ್ಶಕ ವ್ಯೂಮ) (Sample Space)

ರ್‍ಯಾಂಡಮ್ ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭವನೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಗಣ (set) ಕ್ಕೆ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (sample space) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು S ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ರ್‍ಯಾಂಡಮ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾದರಿ ಬಿಂದುಗಳು (sample points) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ (sample space) ವು ಸೀಮಿತ (finite) ಸಂಖ್ಯೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸೀಮಿತ ಮಾದರಿಯ ಸ್ಥಳವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ.

i. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವು ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ಆದರೆ ಎರಡೂ 1 ಹೆಡ್ ಮತ್ತು ಟೆಲ್, 1 ಟೆಲ್ 1 ಹೆಡ್, 2 ಟೆಲ್ ಇದು ಸೀಮಿತ ಮಾದರಿ (Finite sample space) ಆಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 04 ಅಂದರೆ $S = 4$

ಉದಾಹರಣೆ – ii

ಒಂದು ಡೈ (ಆರು (6) ಮೈಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಆಕೃತಿ) ಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವು.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ಇದು ಸೀಮಿತ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವಾಗಿದೆ. ನಾವು ಆಟಕ್ಕೆ ಕುಳಿತಾಯ ಡೈ ಹಾಕಿದರೆ 1, 2, 3, 4, 5, ಅಥವಾ 6 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಮಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ – iii

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ $S = \{H, T\}$

ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳವು ಅನಂತ (infinite)sample space ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಾಣ್ಯದ ತಲೆ (head) ಪಡೆಯುವವರಿಗೆ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಸತತವಾಗಿ ಟಾಸ್

2. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Elementary Probability Theme)

1. ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ ಮತ್ತು ಘಟನೆ (Sample space and event)
2. ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೂಲತತ್ವಗಳು ಮತ್ತು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Probability Axioms and Properties)
3. ಎಣಿಕೆಯ ತಂತ್ರಗಳು (Couniting Techniques)
4. ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಬೆಮ್ಸ್ ನಿಯಮ (Conditional Probability)
5. ಬೇಸ್ ನಿಯಮ (Bayes rules)
6. ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಘಟನೆಗಳು (Independence Events)

1. ಮಾದರಿ ಸ್ಥಳ ಮತ್ತು ಘಟನೆ (Sample space and event) :

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಮುಖ ಸಾಧನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು (Probability) ಒಂದು. ಸಂಭವನೀಯಶಾಸ್ತ್ರದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ 17ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿದೆ. ಒಳ್ಳೆ ಚುರುಕಾದ ಇಸ್ಪೀಟ ಆಟಗಾರ **"ಚೆವಿಲಿಯರ್ ಡಿ ಮೆರೆ"** ಗೆ ಆಟದ ಅನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ದಿಗ್‌ಭ್ರಮೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದವು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಅವನು ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಪಾಸ್ಕಲ್ (Pascal) ನ್ನು ಭೇಟಿಯಾದನು. ಮುಂದೆ ಪಾಸ್ಕಲ್ ಮತ್ತು ಫರ್ಮಟ್‌ರಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯವಾಗಿ ನಡೆದ ಪತ್ರ ವ್ಯವಹಾರವೇ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಯಿತು. ಇಸ್ಪೀಟ ಆಟದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಡನ್ನು ಎಳೆಯುವಾಗ ಇಂತಹ ಎಲೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತದೆಯೋ ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತದೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲಿಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಅದರ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು (ಚಾಲ್ಸನ್ನು) ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಆ ಘಟನೆಯ ಚಾನ್ಸನ್ನು ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

"ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಚಾನ್ಸಗಳ ವಿಜ್ಞಾನವೇ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ." ಸಂಭವನೀಯಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಪ್ರಮುಖರೆಂದರೆ ಚೆರಿಲಿಯ್, ಡಿ ಮೆರೆ